Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. А. ДЕНИСЕНКО, Л. Н. МАРЧЕНКО,
И. В. ПАРУКЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое пособие
для студентов физических факультетов вузов

В семи частях

Часть седьмая

Теория функций

комплексной переменной

Гомель 2007

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73
Д 332

Рецензенты:

Л. П. Авдашкова, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации»;

Д. П. Ющенко, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра математического анализа учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Денисенко, Т. А.

Д 332 Математический анализ [Текст] : практическое пособие для студентов физических факультетов вузов: в 7 ч. Ч. 7. Теория функций комплексной переменной / Т. А. Денисенко, Л. Н. Марченко, И. В. Парукевич; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2007. – 183 с.

ISBN 978-985-439-274-5

Данное пособие посвящено теории функций комплексной переменной. В нем излагаются краткие теоретические сведения, предлагаются решения типовых примеров, содержатся наборы аудиторных, домашних и индивидуальных заданий. Для студентов физических факультетов вузов.

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73

ISBN 978-985-439-274-5

Содержание

Введение

Пособие «Теория функций комплексной переменной» является седьмой, заключительной, частью комплекса пособий по курсу «Математический анализ» для студентов физических факультетов вузов. В нем рассматривается дифференциальное и интегральное исчисление функции комплексной переменной, ряды Тейлора и Лорана, вычеты и их приложения, элементы операционного исчисления.

Весь материал разбит на части, соответствующие одному практическому занятию. В каждое занятие включены некоторые сведения из теории (основные определения и теоремы без доказательств), решение типовых примеров, задания для аудиторной и домашней работ. Отдельно приведены индивидуальные домашние задания. Сформулированные в пособии задания различаются по трудности решения, что позволяет адаптировать сложность задания к уровню подготовки студента.

Содержание пособия соответствует учебной программе по математическому анализу для физических специальностей и связано с курсом лекций.

При подборе задач авторами использованы различные источники, в том числе «Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости» М. Л. Краснова (1981), «Введение в теорию функций комплексного переменного» И. И. Привалова (1977), «Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты)» В. Ф. Чудесенко (1983).

Пособие может быть использовано преподавателями при проведении практических занятий и студентами в их самостоятельной работе над предметом.

Авторы с благодарностью воспримут все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение содержания, а также указания на возможные ошибки (к сожалению, в книгах, содержащих достаточно большое число формул, вероятность ошибки всегда отлична от нуля).

Тема 1 Функции комплексной переменной

Практическое занятие 1 Функции комплексной переменной

1.1 Множества, кривые, области
1.2 Предел последовательности
1.3 Предел и непрерывность функции комплексной переменной
1.4 Основные элементарные функции комплексной переменной

1.1 Множества, кривые, области

Множество точек плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяющих неравенству $|z_0 - z| \le \delta$, называется ε-*окрестностью* точки z_0:

$$U(\delta; z_0) = \left\{\ z \in \mathbb{C} \ \middle|\ |z_0 - z| \le \delta \right\}.$$

Множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z| > R > 0$, называется R-*окрестностью* бесконечно удаленной точки $z = \infty$:

$$U(R; \infty) = \left\{\ z \in \mathbb{C} \ \middle|\ |z| > R > 0 \right\}.$$

Комплексная плоскость вместе с бесконечно удаленной точкой $z = \infty$ называется *расширенной комплексной плоскостью*. Символы $x \pm i\infty$, $\pm\infty + iy$, $\infty e^{i\varphi}$ задают направления на плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Точка z_0 называется *предельной* точкой множества $E \subset \mathbb{C}$, если в любой окрестности точки z_0 расположено бесконечно много точек $z \in E$. Предельная точка z_0 может принадлежать множеству E, а может и не принадлежать ему.

Точка $z \in E$ называется *внутренней* точкой множества E, если существует такое $\delta > 0$, что окрестность $U(\delta; z)$ состоит только из точек множества E. Множество называется *открытым*, если каждая точка этого множества является его внутренней точкой.

Точка z_0 расширенной комплексной плоскости называется *граничной* точкой множества E, если при любом $\delta > 0$ окрестность $U(\delta, z_0)$ содержит точки $z \in E$ и точки $z \notin E$. Граничная точка множества E может принадлежать множеству E, а может и не принадлежать ему. Совокупность всех граничных точек множества называется *границей* множества. Множество E, содержащее свою границу, называется *замкнутым* и обозначается $\overline{E}$.

Пусть $t \in T \subset \mathbb{R}$. Если каждому значению $t \in T$ поставлено в соответствие $z \in \mathbb{C}$, то говорят, что на множестве T задана комплекснозначная функция действительной переменной t: $z = z(t)$. Полагая $z(t) = x(t) + iy(t)$, можно считать, что задание функции $z(t)$ равносильно заданию на множестве T двух действительных функций $x(t)$ и $y(t)$ переменной t. Очевидно, если $x(t)$ и $y(t)$ непрерывные функции, то и функция $z(t)$ является непрерывной. Графиком функции $z(t)$ является кривая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Точкой *самопересечения* кривой $z(t)$ называется точка z, для которой при $t_1 \neq t_2$ имеет место соотношение $z(t_1) = z(t_2)$.

Кривой Жордана называется непрерывная кривая $z(t)$, $t \in T$, не имеющая точек самопересечения. *Замкнутой кривой* называется кривая Жордана, у которой конец совпадает с началом (совпадение начала и конца замкнутой кривой не считается точкой самопересечения). Кривая Жордана $z(t)$ называется *гладкой*, если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно-дифференцируемы и $x_t^{'2} + y_t^{'2} \neq 0$ на множестве T. Кривая Жордана называется *кусочно-гладкой,* если она состоит из конечного числа гладких кривых.

Множество E называется *связным* множеством, если две любые его точки можно соединить кривой Жордана, целиком лежащей в E. Связное открытое множество E называется *областью*.

а) б)

Рисунок 1. 1 – Односвязная (а) и многосвязная (б) области

Область, ограниченная замкнутым контуром γ, обозначается D_γ. Область D называется *односвязной*, если любой замкнутый контур γ целиком лежащий в D, ограничивает область $D_\gamma \subset D$

(рисунок 1. 1, а). В противном случае область называется *много-связной* (рисунок 1. 1, б).

Для многосвязной области D найдутся контуры γ_1, γ_2, …, γ_n, такие, что точки из областей D_{γ_1}, D_{γ_2}, …, D_{γ_n} не входят в D. С помощью дополнительных разрезов l_1, l_2, ..., l_n многосвязная область преобразуется в односвязную (рисунок 1. 2), так как в области с разрезами любой замкнутый контур γ не будет содержать внутри себя точек из областей D_{γ_1}, D_{γ_2}, …, D_{γ_n}.

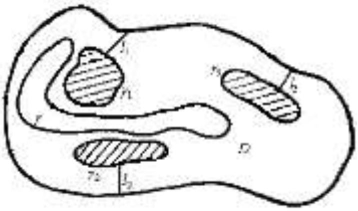

Рисунок 1. 2 – Многосвязная область D и ее разрезы l_1, l_2, l_3

Положительным направлением обхода границы области D считается то направление, при котором область D остается слева.

1.2 Предел последовательности

Пусть дана последовательность комплексных чисел

$$(z_n),\ n = 1, 2, \dots .$$

Число a, $a \in \mathbb{C}$ называется *пределом* числовой последовательности (z_n), если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всякого $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $|z_n - a| < \varepsilon$:

$$a = \lim_{n\to\infty} z_n \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N(\varepsilon) \quad |z_n - a| < \varepsilon .$$

Комплексное число $a = \infty$ называется *пределом* последовательности (z_n), если $\forall\, R > 0$ найдется такой номер $N(R)$, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $|z_n| > R$:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \iff \forall\, R > 0\ \exists\, N(R) : \forall n \ge N(R) \quad |z_n| > R .$$

Теорема 1 *Для того чтобы существовал конечный предел* $a = \alpha + i\beta$ *последовательности* (z_n), $z_n = x_n + iy_n$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы последовательностей действительных чисел* (x_n) *и* (y_n) *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta$.

Пусть $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$ и $a = r e^{i\varphi}$ показательные формы для $z_n = x_n + iy_n$ и $a = \alpha + i\beta$ соответственно.

Теорема 2 Для того чтобы существовал конечный предел $r e^{i\varphi}$, $r \neq 0$, *последовательности* $\left(r_n e^{i\varphi_n}\right)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовал предел* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$, *а при соответствующем выборе области главных значений аргументов* φ_n *и* φ *существовал предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$.

Последовательность (z_n) называется *ограниченной*, если существует число $M \in \mathbb{R}_+$ такое, что все элементы последовательности удовлетворяют неравенству $|z_n| \le M$.

Сходящиеся последовательности комплексных чисел обладают *свойствами*:

– сходящаяся последовательность имеет только один предел;

– сходящаяся последовательность ограничена;

– если последовательность (z_n) сходится, то она ограничена:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \;\Rightarrow\; \exists M \in \mathbf{R} : |z_n| \le M \;;$$

– сумма (разность) двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n ;$$

– произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность предел которой равен произведению пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} (z_n \cdot w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n ;$$

– частное двух сходящихся последовательностей (z_n) и (w_n), $\lim\limits_{n\to\infty} w_n \neq 0$, есть сходящаяся последовательность предел которой равен частному пределов последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{w_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} w_n};$$

Т е о р е м а 3 (к р и т е р и й К о ш и) *Для того чтобы последовательность* (z_n) *была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *существовал номер* $N(\varepsilon)$ *такой, что для всякого* $n>N(\varepsilon)$ *и* $p=1,2,\ldots$ *справедливо неравенство*

$$\left|z_{n+p}-z_n\right|<\varepsilon .$$

1.3 Предел и непрерывность функции комплексной переменной

Если каждому комплексному числу $z\in E$ $(z=x+iy)$ по правилу f поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел $w\in G$, ($w=u+iv$), то говорят, что на множестве E задана *функция комплексной переменной* $w=f(z)$, переменная z называется *независимой переменной*, а w – *значением функции*.

Если каждому $z\in E$ соответствует одно значение $w\in G$, то функция $w=f(z)$ называется *однозначной*; в противном случае – *многозначной.* При этом множество E называется *областью* определения, а совокупность всех значений w, которые функция принимает на E , называется *множеством значений*.

Геометрически функция $w=f(z)$ представляет собой отображение области E плоскости □ (Oxy) на некоторую область G плоскости **W** (O^*uv) (рисунок 1. 3)

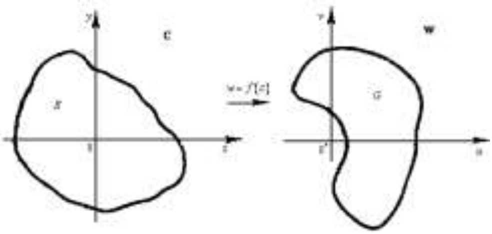

Рисунок 1. 3 – Геометрическая интерпретация функции $w = f(z)$

Обратное отображение множества G на множество E определяет *обратную* функцию $z = \varphi(w)$.

Если функция $w_1 = f(z)$ отображает область E на область E_1, а функция $w = g(w_1)$ отображает область E_1 на область G, то *сложная* функция $w = g\left(f(z)\right)$ осуществляет отображение области E на G.

Функция $f(z)$ называется *однолистной* на множестве E, если она однозначна и в различных точках $z_1 \neq z_2$ множества E принимает различные значения $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Пусть $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Тогда функция $f(z)$ может быть записана в виде:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ – действительная часть, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ – мнимая часть.

Модуль функции $f(z)$ находится по формуле:

$$\left|f(z)\right| = \sqrt{u^2(x; y) + v^2(x; y)}.$$

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, кроме, быть может, самой точки z_0.

Комплексное число A ($A \neq \infty$) называется *пределом* функции $f(z)$ при $z \to z_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек z, удовлетворяющих неравенству $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$:

$$A = \lim_{z \to z_0} f(z) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall z \;\; 0 < |z - z_0| < \delta \qquad |f(z) - A| < \varepsilon .$$

Комплексное число $A = \infty$, называется *пределом* функции $f(z)$ при $z \to z_0$, если для любого $R > 0$ найдется такое $\delta(R) > 0$, что для всех точек z, удовлетворяющих неравенству $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z)| > R$:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall R > 0 \; \exists \delta(R) > 0 : \forall z \;\; 0 < |z - z_0| < \delta \qquad |f(z)| > R .$$

Функция $\alpha(z)$ называется *бесконечно малой* при $z \to z_0$, если ее предел равен нулю: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$.

Теорема 4 (критерий Коши) Для существования конечного предела A функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек z' и z'', принадлежащих области определения функции $f(z)$ и удовлетворяющих неравенствам $0 < |z' - z| < \delta$ и $0 < |z'' - z| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$.

Теорема 5 Пусть функция $f(z) = u(x, y,) + iv(x, y)$ определена и конечна в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$ и $A = u_0 + iv_0$. Тогда для того, чтобы $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0 , \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0 .$$

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют конечные пределы при $z \to z_0$. Тогда имеют место соотношения:

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z) ,$$

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z) ,$$

$$\lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)} \text{ при } g(z) \neq 0 .$$

Функция $f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Функция $f(z)$ называется *непрерывной в области* D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Сумма, разность и произведение конечного числа функций комплексной переменной, непрерывных в области D, является непрерывной функцией в этой области. Частное двух непрерывных функций $f(z)$ и $g(z)$ в области D является непрерывной функцией в тех точках этой области, где $g(z) \neq 0$.

Если функция $w_1 = f(z)$ непрерывна в точке z_0 и функция $w = g(w_1)$ непрерывна в точке $w_1 = f(z_0)$, то сложная функция $w = g(f(z))$ непрерывна в точке z_0.

Функция $f(z)$ называется *равномерно непрерывной* в области D, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых двух точек z', $z'' \in D$, расстояние между которыми меньше δ ($|z' - z''| < \delta$), расстояние между соответствующими значениями функции $f(z')$ и $f(z'')$ меньше ε ($|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$).

Очевидно, что всякая равномерно непрерывная функция в области D является непрерывной функцией в этой области. Обратное утверждение верно не всегда: непрерывная функция в области D может и не обладать свойством равномерной непрерывности.

Теорема 6 (Кантора) Если $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, то она равномерно непрерывна в этой области.

1.4 Основные элементарные функции комплексной переменной

Следующие функции (как однозначные, так и многозначные) называются элементарными:

а) *дробно-рациональная* функция

$$\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m},$$

$$a_i, b_j \in \square\ , \ i = 0,1,\ldots,\ n\ ,\ \ j = 0,1,\ldots,\ m\ ,\ \ n\ ,\ m \in \square\ ,$$

частными случаями которой являются:

– *линейная* функция $a\,z + b$;

– *степенная* функция z^n;

– *дробно-линейн*ая функция $\dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$;

– функция *Жуковского* $\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$;

б) *показательная* функция e^z, для которой при $z = x + iy$ справедливо представление

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y),$$

и формулы Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z\ , \qquad e^{-iz} = \cos z - i\sin\ z\,;$$

в) *тригонометрические* функции:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\ , \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\ ,$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}\ , \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}\ .$$

Все тригонометрические тождества для тригонометрических функций комплексного переменного аналогичны тождествам тригонометрических функций действительного переменного;

г) *гиперболические* функции:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}\ , \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}\ ,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\ , \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}\ .$$

Гиперболические и тригонометрические функции связаны между собой соотношениями:

$$\operatorname{sh} z = -i \cdot \sin iz\ , \qquad \sin z = -i\operatorname{sh} iz\ ,$$
$$\operatorname{ch} z = \cos iz\ , \qquad \cos z = \operatorname{ch} iz\ ,$$
$$\operatorname{th} z = -i\operatorname{tg} iz\ , \qquad \operatorname{tg} z = -i\operatorname{th} iz\ ,$$
$$\operatorname{cth} z = i\operatorname{ctg} iz\ , \qquad \operatorname{ctg} z = i\operatorname{cth} iz\ .$$

Для гиперболических функций справедливы тождества, аналогичные тригонометрическим тождествам за исключением

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1;$$

д) *логарифмическая* функция

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z \quad \text{или}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \ k \in \mathbb{Z},$$

которая является многозначной.
Значение функции, которое получается при $k = 0$, называется *главным значением* и обозначается

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z;$$

е) *общая степенная* функция

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}, \ \alpha \in \mathbb{C}, \ z \neq 0,$$

которая является многозначной, ее главное значение равно

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \cdot \ln z};$$

ж) *общая показательная* функция

$$a^z = e^{z \cdot \operatorname{Ln} a}, \ a \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

которая является многозначной, и ее главное значение равно

$$a^z = e^{z \cdot \ln a};$$

и) *обратные тригонометрические* функции $\operatorname{Arc}\sin z$, $\operatorname{Arc}\cos z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ определяются как обратные функции к функциям $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ соответственно. Эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмическую:

$$\operatorname{Arcsinz} = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \qquad \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{z - i}{z + i}\right).$$

Функции являются многозначными, и их главные значения $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$ получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмов;

к) *обратные гиперболические* функции $\operatorname{Arcsh} z$, $\operatorname{Arcch} z$, $\operatorname{Arcth} z$, $\operatorname{Arccth} z$ определяются как обратные функции к функциям $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ соответственно. Эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмическую:

$$\operatorname{Arcsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right), \qquad \operatorname{Arcch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \qquad \operatorname{Arccth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Функции являются многозначными и их главные значения $\operatorname{arcsh} z$, $\operatorname{arcch} z$, $\operatorname{arcth} z$, $\operatorname{arccth} z$ получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмов.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется окрестностью точки z_0?

2 Дайте определение: а) предельной, б) внутренней, в) граничной точки множества $E \subset \mathbb{C}$.

3 Какое множество называется: а) открытым, б) замкнутым?

4 Какая функция называется комплекснозначной?

5 Какая кривая называется кривой Жордана?

6 Дайте определение связного множества.

7 Что называется областью комплексной плоскости?

8 Какая область называется: а) односвязной, б) многосвязной?

9 Какое направление обхода границы области называется положительным?

10 Сформулируйте определение числовой последовательности комплексных чисел.

11 Что называется пределом числовой последовательности комплексных чисел и какими свойствами он обладает?

12 Дайте определение функции комплексной переменной.

13 Какая функция называется: а) однозначной, б) многозначной, в) однолистной?

14 Как определяется действительная и мнимая части функции комплексной переменной?

15 Что называется пределом функции комплексной переменной?

16 Сформулируйте критерий Коши существования предела функции комплексной переменной.

17 Какая функция комплексной переменной называется непрерывной а) в точке, б) в области?

18 Какая функция называется равномерно-непрерывной?

19 Какие функции комплексной переменной называются элементарными?

Решение типовых примеров

1 Вычислить пределы последовательностей:

а) $z_n = \dfrac{n^2 + in - 2i + 4}{in^2 - 5n + 4i}$; б) $z_n = n\,\mathrm{tg}\dfrac{i}{n}$.

Решение. а) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 + in - 2i + 4}{in^2 - 5n + 4i} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1 + + \dfrac{i}{n} + \dfrac{-2i+4}{n^2}\right)}{n^2\left(i - \dfrac{5}{n} + \dfrac{4i}{n^2}\right)} = \frac{1}{i} = -i;$$

б) имеем

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{tg}\frac{i}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{tg}\dfrac{i}{n}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{i}{n}}{\dfrac{i}{n}}\cdot\frac{i}{\cos\dfrac{i}{n}} = 1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{i}{\cos\dfrac{i}{n}} = i.$$

2 Найти значение модуля функции $w = \sin z$ в точке $z_0 = \pi + i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$.

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда

$w = \sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cos iy + \cos x\sin iy =$

$= \sin x\,\mathrm{ch}\,y + i\,\mathrm{sh}\,y\cos x$.

Отсюда

$$\mathrm{Re}(\sin z) = \sin x\,\mathrm{ch}\,y,$$
$$\mathrm{Im}(\sin z) = \mathrm{sh}\,y\cos x.$$

Тогда модуль функции $w = \sin z$ равен

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x\,\mathrm{ch}^2 y + \mathrm{sh}^2 y\cos^2 x} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 x\,\mathrm{ch}^2 y + \mathrm{sh}^2 y\left(1 - \sin^2 x\right)} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 x\left(\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y\right) + \mathrm{sh}^2 y} = \sqrt{\sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y}.$$

Подставляя $z_0 = \pi + i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$, получим

$$\left|\sin\left(\pi + i\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)\right| = \sqrt{\sin^2\pi + \mathrm{sh}^2\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)} =$$

$$= \operatorname{sh}\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) = \frac{e^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)} - e^{-\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}}{2} =$$

$$= \frac{\left(2+\sqrt{5}\right)^2 - 1}{2\left(2+\sqrt{5}\right)} = \frac{4+4\sqrt{5}+5-1}{2\left(2+\sqrt{5}\right)} = \frac{8+4\sqrt{5}}{2\left(2+\sqrt{5}\right)} = 2 .$$

Видно, что тригонометрические функции комплексной переменной могут принимать значения по модулю больше единицы.

3 Найти значение модуля и главное значение аргумента функции $w = \operatorname{ch} z$ в точке $z_0 = i$.

Решение. Имеем $\operatorname{ch} i = \cos 1$. Тогда значение модуля функции $w = \operatorname{ch} z$ в точке $z_0 = i$ равно

$$\left|\operatorname{ch} i\right| = \sqrt{\left(\cos 1\right)^2 + 0^2} = \cos 1,$$

а главное значение аргумента –

$$\arg\left(\operatorname{ch} i\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{\cos 1}\right) = 0 .$$

4 Найти все значения функции $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{z}$ в точке $z_0 = i$.

Решение. Для извлечения корня n-ой степени из комплексного числа z воспользуемся формулой Муавра в показательной форме:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i(\varphi + 2k\pi)}{n}}, \; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 .$$

Так как показательная форма комплексного числа $z_0 = i$ равна $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, то $\sqrt{i} = e^{\frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}$, $k = 0, 1$.

Тогда функция в точке $z_0 = i$ принимает два значения:

$$w_1 == \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{\frac{\pi}{4}i}, \; w_1 == \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

5 Вычислить значения функции в точке:

а) $\operatorname{Ln}(-1)$; б) $\operatorname{Arctg}(1-i)$.

Решение. а) имеем $z_0 = -1$; $\left|z_0\right| = 1$; $\arg z_0 = \pi$.

Тогда

$$\mathrm{Ln}(-1)=\ln 1+i\pi+2\pi ki=i\pi+2\pi ki=i\pi(1+2k),\ k\in\mathbb{Z};$$

б) по свойствам обратных тригонометрических функций имеем

$$\mathrm{Arctg}(1-i)=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{2+i}{-i}=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}(2i-1).$$

Для числа $2i-1$ модуль и главное значение аргумента есть

$$|2i-1|=\sqrt{5},$$

$$\arg(2i-1)=\pi-\mathrm{arctg}\,2.$$

Найдем

$$\mathrm{Ln}(2i-1)=\ln\sqrt{5}+i(\pi-\mathrm{arctg}\,2)+2k\pi i=$$

$$=\ln\sqrt{5}-i\,\mathrm{arctg}\,2+(2k+1)\pi i,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Тогда

$$\mathrm{Arctg}(1-i)=-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,2-\frac{i}{2}\ln\sqrt{5}+\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in\mathbb{Z}.$$

6 Найти область однолистности функции $w=z^2$.

Решение. Возьмем на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ две различные точки z_1 и z_2, заданные в показательной форме:

$$z_1=r_1e^{i\varphi_1},\ z_2=r_2e^{i\varphi_2}.$$

Из условия однолистности

$$r_1^2e^{2i\varphi_1}=r_2^2e^{2i\varphi_2}$$

находим $r_1=r_2$, $2\varphi_2=2\varphi_1+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Очевидно, при $k=0$ получим $\varphi_2=\varphi_1$, т. е. $z_1=z_2$.

Так как $z_1\neq z_2$, то $\varphi_2=\varphi_1+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Таким образом, область однолистности функции $w=z^2$ не должна содержать внутри себя точек, модули которых совпадают, а аргументы отличаются на π.

7 Вычислить предел $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\cos z}{\mathrm{ch}\,iz}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{z\to 0}\frac{\cos^2 z}{\mathrm{ch}\,iz}=\quad \mathrm{ch}\,iz=\cos z\quad=\lim_{z\to 0}\frac{\cos^2 z}{\cos z}=\lim_{z\to 0}\cos z=1.$$

Задания для аудиторной работы

1 Найти пределы последовательностей:

а) $z_n = \frac{i^n}{n}$; б) $z_n = n\sin\frac{i}{n}$.

2 Найти действительную и мнимую части функций:

а) $w = \sin z$; д) $w = \operatorname{sh} z$;

б) $w = \frac{\overline{z}}{i} + \frac{i}{\overline{z}}$; е) $w = i\,\overline{z} + 2z^2$;

в) $w = 2z - 1$; ж) $w = z + z^2$;

г) $w = z^{-1}$; и) $w = e^{-z}$.

3 Найти значение модуля и главное значение аргумента функций в точках:

а) $w = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{2} + i\ln 2$; в) $w = \operatorname{th} z$, $z_0 = \pi i$;

б) $w = ze^z$, $z_0 = \pi i$; г) $w = 3^z$, $z_0 = 2 - i$.

4 Найти все значения функции $w = f(z)$ в точке z_0:

а) $w = z + \sqrt[4]{z}$, $z_0 = -1$; б) $w = \frac{\sqrt{z} + i}{\sqrt{z} - i}$, $z_0 = i$.

5 Вычислить значения функций в точках:

а) $\operatorname{Ln} e$; д) $\operatorname{Ln}(-1 - i)$; к) $\operatorname{Ln}(2 + i)$;

б) $\operatorname{Arcsin} i$; е) $\operatorname{sh}\frac{\pi i}{3}$; л) $\operatorname{th}\pi i$;

в) i^i; ж) 1^i; м) $(1 - i)^{3-3i}$;

г) $e^{\frac{\pi}{4}i}$; и) $\cos\pi i$; н) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}i$.

6 Решить уравнения:

а) $e^{-z} + 1 = 0$; б) $4\cos z + 5 = 0$.

7 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{z\to -i}\frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}$; б) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2z}{\operatorname{ch} iz + \operatorname{sh} iz}$.

8 Исследовать на непрерывность функцию $w = \overline{z}$.

Задания для домашней работы

1 Найти пределы последовательностей:

а) $z_n = \dfrac{n+2i}{3n+7i}$; б) $z_n = \dfrac{\operatorname{sh} in}{n}$.

2 Найти действительную и мнимую части функций:

а) $w = \operatorname{ch}(z-i)$; г) $w = 2i - z + iz^2$;

б) $w = \operatorname{tg} z$; д) $w = \dfrac{z+i}{i-\overline{z}}$;

в) $w = z^2 - 1$; е) $w = e^z$.

3 Найти значение модуля и главное значение аргумента функций в точках:

а) $w = \sin z$, $z_0 = \pi + i\ln 2$;

б) $w = \operatorname{sh} z$, $z_0 = 1 + i\dfrac{\pi}{2}$.

в) $w = 10^z$, $z_0 = i$.

4 Найти все значения функции $w = f(z)$ в точке z_0:

а) $w = \sqrt{1-\sqrt{z}}$, $z_0 = -i$; б) $w = \sqrt{i+\sqrt{z}}$, $z_0 = -1$.

5 Вычислить значения функций в точках:

а) $\operatorname{Ln}(-i)$; г) $\operatorname{Ln}(2-i)$; ж) $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $i^{\frac{1}{i}}$; д) $(-2+i)^i$; и) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^{1+i}$;

в) $\operatorname{Arctg} \dfrac{i}{3}$; е) $\operatorname{Arccos} i$; к) $\operatorname{ctg} \pi i$.

6 Решить уравнения:

а) $e^z + i = 0$; б) $\sin z = \pi i$.

7 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{\operatorname{sh} iz}$; б) $\lim\limits_{z\to -\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{2z}+1}{e^z + i}$.

8 Исследовать на непрерывность функцию $w = |z| \operatorname{Re} z$.

Практическое занятие 2 Аналитические функции. Условия Коши-Римана

2.1 Производная и дифференциал функции комплексной переменной
2.2 Условия Коши-Римана
2.3 Геометрический смысл модуля и аргумента производной
2.4 Конформное отображение

2.1 Производная и дифференциал функции комплексной переменной

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и конечна в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$. И пусть точки z и $z+\Delta z$ принадлежат области D. Обозначим $\Delta f(z) = f(z+\Delta z) - f(z)$.

Производной функции $f(z)$ в точке z называется предел (если он существует и конечный)

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}.$$

Приращение Δz стремится к нулю любым образом, т. е. точка $z+\Delta z$ приближается к точке z по любому направлению.

Функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z, если ее приращение $\Delta f(z)$ представимо в виде

$$\Delta f(z) = C \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z) \cdot \Delta z,$$

где $\alpha(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Теорема 1 Для того чтобы функция $f(z)$ была дифференцируемой в точке z, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\Delta f(z) = f'(z) \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z) \cdot \Delta z,$$

где $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha(\Delta z) = 0$.

Величина $f'(z)\Delta z$ называется *дифференциалом* функции $f(z)$ и обозначается $df(z) = f'(z)\Delta z$.

В частности, при $f(z)=z$ получаем $dz=\Delta z$, т. е. дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением. Заменяя приращение Δz на dz, имеем

$$df(z)=f'(z)dz.$$

Таким образом, дифференциал дифференцируемой функции равен произведению ее производной на дифференциал независимой переменной.

Функция $f(z)$ называется *аналитической в точке* z, если она дифференцируема как в самой точке, так и в ее окрестности. Функция $f(z)$ называется *аналитической в области* $D\subset\mathbb{C}$, если она аналитична в каждой точке этой области.

2.2 Условия Коши-Римана

Пусть $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ однозначная функция комплексной переменной $z=x+iy$, определенная в области D.

Теорема 2 Для того чтобы в точке $z=x+iy$ *функция* $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ *была дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы функции* $u(x;y)$ *и* $v(x;y)$ *были дифференцируемы в точке* $(x;y)$ *как функции двух действительных переменных* x *и* y*, и выполнялись условия Коши-Римана:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Производная аналитической функции находится по формулам:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Поскольку свойства алгебраических действий и правила предельного перехода для функций действительной переменной распространяются и на функцию комплексной переменной, то правила дифференцирования функций действительной переменной справедливы и для функции комплексной переменной:

$$\left(f(z)+g(z)\right)' = f'(z)+g'(z),$$

$$\left(f(z)\cdot g(z)\right)' = f'(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g'(z),$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)\cdot g(z)-f(z)\cdot g'(z)}{g^2(z)},\ g(z)\neq 0,$$

$$\left(f\left(g(z)\right)\right)' = f_g{}'\cdot g'(z),$$

$$f'(z) = \frac{1}{\left(f^{-1}(z)\right)'}.$$

Функция $g(x;y)$ действительных переменных x и y называется *гармонической,* если она дважды дифференцируема и ее частные производные $\dfrac{\partial^2 g(x;y)}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 g(x;y)}{\partial y^2}$ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 g(x;y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g(x;y)}{\partial y^2}=0.$$

Теорема 3 Если функция $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ аналитическая в области $D\subset\mathbb{C}$, то $u(x;y)$ и $v(x;y)$ являются гармоническими в области D.

Обратное верно не всегда: если взять за $u(x;y)$ и $v(x;y)$ две произвольные функции, гармонические в области D, то функция $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ не всегда будет аналитической в этой области, так как две произвольно взятые гармонические функции могут не удовлетворять условиям Коши-Римана.

Две гармонические в области $D\subset\mathbb{C}$ функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$, связанные в области D условиями Коши-Римана, называются *сопряженными.*

Теорема 4 Пусть $D\subset\mathbb{C}$ односвязная область и функция $u(x;y)$ гармоническая в D. Тогда существует такая сопряженная ей гармоническая функция $v(x;y)$, определенная с точ-

ностью до постоянного слагаемого, что функция $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ *является аналитической.*

2.3 Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть функция $w=f(z)$ – аналитическая в некоторой точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$. Модуль производной $\left|f'(z_0)\right|$ называется *коэффициентом подобия* в точке z_0 при отображении $w=f(z)$. При $\left|f'(z_0)\right|>1$ имеет место *растяжение*, при $\left|f'(z_0)\right|<1$ – *сжатие*.

Аргумент производной $\arg f'(z_0)$ – это угол, на который надо повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой Γ, проходящей через точку z_0 так, чтобы получить касательную в точке $w_0=f(z_0)$ к образу Γ' этой кривой при отображении $w=f(z)$. При этом, если $\arg f'(z_0)>0$, то поворот происходит против часовой стрелки, если $\arg f'(z_0)<0$ – по часовой.

2.4 Конформное отображение

Взаимно-однозначное отображение области $D\subset\mathbb{C}$ на область $D'\subset\mathbf{W}$, осуществляемое функцией $w=f(z)$, называется *конформным*, если оно в каждой точке области D обладает свойством сохранения углов и постоянством растяжений.

Другими словами, если $w=f(z)$ конформное отображение области $D\subset\mathbb{C}$ в область $D'\subset\mathbf{W}$, то

– величина угла между пересекающимися в точке z_0 кривыми области D равна величине угла между образами этих кривых, пересекающихся в точке $w_0=f(z_0)$ области D';

– бесконечно малому кругу с центром в точке $z_0\in D$ соответствует бесконечно малый круг с центром в точке $w_0=f(z_0)\in D'$.

Если при отображении $w = f(z)$ направление отсчета соответствующих углов одинаковое, то имеет место *конформное отображение 1-го рода*, если направление отсчета углов изменяется на противоположное, то – *конформное отображение 2-го рода*.

Теорема 5 Пусть функция $w = f(z)$ – аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда отображение $w = f(z)$ является конформным в точке z_0.

Теорема 6 (критерий конформности) Для того, чтобы функция $w = f(z)$ являлась конформным отображением в области D, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ была однолистной, аналитической и $f'(z) \neq 0$ всюду в области D.

Для конформного отображения $w = f(z)$ справедливы следующие теоремы.

Теорема 7 (Римана) Всякую односвязную область D плоскости □, граница которой состоит более чем из одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга $|w| < 1$ плоскости $\mathbf{W}$.

Теорема 8 Существует единственная функция $w = f(z)$, осуществляющая конформное отображение заданной односвязной области D, граница которой состоит более чем из одной точки, на единичный круг $|w| < 1$ так, что

$$f(z_0) = 0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha, z_0 \in E, \alpha \in □ .$$

Теорема 9 (принцип взаимно однозначного соответствия границ) Пусть в ограниченной односвязной области $D \subset □$ с контуром γ задана аналитическая функция $w = f(z)$, непрерывная в $\bar{D}$ и осуществляющая взаимно однозначное отображение контура γ на некоторый контур Γ плоскости $\mathbf{W}$. Тогда, если при заданном отображении контуров сохраняется направление обхода, то функция $w = f(z)$, осуществляет конформное отображение D на внутреннюю область $D' \subseteq \mathbf{W}$, ограниченную контуром Γ.

Пусть область D содержит в составе своей границы прямолинейный отрезок γ. Область D^*, полученная зеркальным отражением области D относительно прямой, на которой лежит отрезок γ, называется областью, *симметричной* области D относительно γ (рисунок 2. 1).

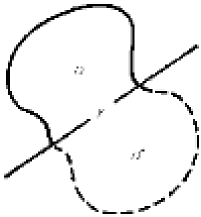

Рисунок 2. 1 – Симметричные области D и D^* относительно γ

Точки z_1 и z_2 называются *симметричными* относительно прямой, если они лежат на перпендикуляре к этой прямой по разные стороны от нее и на равных расстояниях.

Теорема 10 (принцип симметрии Римана-Шварца) Пусть 1) граница области D *содержит прямолинейный отрезок* γ *;*

2) на множестве $D \cup \gamma$ *определена непрерывная функция* $w = f(z)$*, осуществляющая отображение области* D *на область* D^**;*

3) при отображении $w = f(z)$ *прямолинейный отрезок* γ *границы области* D *переходит в прямолинейный отрезок* Γ *границы области* D^*.

Тогда 1) если $f(z)$ *аналитична в области* D*, то она аналитична в области* D^**;*

2) области D и D^* *симметричны относительно прямой, содержащей отрезок* γ *;*

3) различные точки z_1, z_2 *из* D *симметрично отображаются в различные точки* w_1 *и* w_2 *из* D^* *соответственно.*

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется производной функции $f(z)$ в точке?

2 Какая функция называется дифференцируемой в точке?

3 Сформулируйте необходимое и достаточное условия дифференцируемости.

4 Что называется дифференциалом функции комплексной переменной?

5 Какая функция называется аналитической: а) в точке, б) в области?

6 Для каких функций выполняются условия Коши-Римана?

7 По каким формулам вычисляется производная функции комплексной переменной?

8 Какие функции называются гармоническими? Является ли аналитическая функция гармонической?

9 В чем состоит геометрический смысл модуля производной?

10 В чем состоит геометрический смысл аргумента производной?

11 Какое отображение называется конформным?

12 В чем состоит различие между конформным отображениями 1- и 2-го родов?

13 Сформулируйте критерий конформного отображения?

14 В чем суть теоремы Римана?

15 В чем состоит принцип соответствия границ?

16 Сформулируйте принцип симметриии Римана-Шварца.

Решение типовых примеров

1 Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z)=\overline{z}$.

Решение. Функция $f(z)=\overline{z}$ непрерывна на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Она может быть представлена в виде

$$f(z)=x-iy.$$

Тогда при любом z имеем

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Приращение Δz может стремиться к нулю по любому направлению. Выбирая для Δz два различных направления, получим два различных значения отношения:

– если $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \dfrac{\Delta x - 0i}{\Delta x + 0i} = 1$;

– если $\Delta x = 0$, $\Delta y \neq 0$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \dfrac{0 - i\Delta y}{0 + i\Delta y} = -1$.

Следовательно, предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ не существует.

Функция $f(z) = \overline{z}$ непрерывная на всей комплексной плоскости не имеет производной ни в одной точке плоскости.

2 Исследовать функцию $w = z^2$ на дифференцируемость и найти ее производную.

Р е ш е н и е. Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy .$$

Следовательно, $u(x;y) = x^2 - y^2$, $v(x;y) = 2xy$.

Условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

выполняются в любой точке $(x;y)$.

Значит, функция $w = z^2$ дифференцируема на всей комплексной плоскости.

Тогда

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2iy = 2(x + iy) = 2z .$$

3 Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$, если $v(x;y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ при условии $f(0) = 0$.

Р е ш е н и е. Частные производные первого и второго порядков функции $v(x;y)$ равны:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + 12xy - 3y^2, \ \frac{\partial v}{\partial y} = 6x^2 - 6xy - 6y^2;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6x + 12y, \ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -6x - 12y.$$

Функция $v(x;y)$ является гармонической на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, так как

$$\frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial y^2} = 0.$$

Согласно теореме 4, существует функция $u(x;y)$, сопряженная к $v(x;y)$. Проинтегрируем 1-е условие Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ по переменной x:

$$u(x;y) = \int \left(6x^2 - 6xy - 6y^2\right) dx,$$

$$u(x;y) = 2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + C(y).$$

Дифференцируя последнее равенство по переменной y и подставляя во 2-е условие Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, получим

$$-3x^2 - 12xy + C'(y) = -\left(3x^2 + 12xy - 3y^2\right).$$

Отсюда $C'(y) = 3y^2$. Интегрируя по y, получим

$$C(y) = y^3 + C, \ C = \text{const}.$$

Тогда аналитическая функция имеет вид

$$f(z) = \left(2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3 + C\right) + i\left(x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3\right).$$

Из условия $f(0) = 0$ находим постоянную C: $C = 0$.

Искомая функция примет вид

$$f(z) = \left(2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3\right) + i\left(x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3\right) =$$

$$= (x + iy)^3 \cdot (2 + i) = (2 + i)z^3.$$

4 Выяснить геометрическую картину отображения, осуществляемого функцией $w = 5z$.

Решение. Поскольку $w' = 5 \neq 0$, то отображение $w = 5z$ является конформным во всех точках плоскости □ .

Модуль производной $\left| f'(z_0) \right| = 5 > 1$, значит, происходит растяжение при отображении $w = 5z$.

Аргумент производной равен $\arg f'(z) = 0$, поэтому направление при отображении не меняется.

5 Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w = z^2$ в точке $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Решение. Имеем $w'(z) = 2z$. Тогда

$$w'\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Так как

$$\left| f'\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) \right| = 4 > 0,$$

$$\arg f'\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4} > 0,$$

то при отображении $w = z^2$ происходит растяжение с коэффициентом, равным 4, и поворот против часовой стрелки на угол, равный $\frac{\pi}{4}$.

6 Найти область D', в которую функция $w = z^2$ отображает круг $\left| z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$.

Решение. Функция $w = z^2$ является аналитической всюду в плоскости □ . Введем полярные координаты

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Тогда отображение $w = z^2$ в тригонометрической форме запишется в виде

$$w = r^2 (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 \text{ или } w = r^2 (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

Найдем уравнение окружности $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ в полярных координатах:

$$\left|r\cos\varphi + ir\sin\varphi - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\left(r\cos\varphi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(r\sin\varphi\right)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{r^2 - r\cos\varphi + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow r^2 - r\cos\varphi + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow r = \cos\varphi,$$

т. е. уравнение окружности $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ в полярных координатах $r,\ \varphi$ принимает вид $r=\cos\varphi$.

Обозначим через $\rho,\ \theta$ полярные координаты в плоскости **W**. Тогда справедливы равенства

$$\rho = r^2,\ \theta = 2\varphi.$$

При отображении $w=z^2$ окружность $r=\cos\varphi$ переходит в кардиоиду

$$\rho = \cos^2\frac{\theta}{2} \text{ или } \rho = \frac{1}{2}(1+\cos\theta),$$

при этом сохраняется направление обхода окружности $r=\cos\varphi$ и кардиоиды $\rho = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)$.

На основании принципа взаимно однозначного соответствия границ заключаем, что функция $w=z^2$ осуществляет конформное отображение внутренности рассматриваемой окружности на внутренность кардиоиды (рисунок 2. 4).

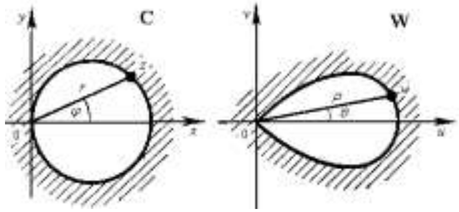

Рисунок 2. 2 – Рисунок к типовому примеру 6

Задания для аудиторной работы

1 Выяснить, в каких точках дифференцируемы функции:

а) $w = z^2 \cdot \overline{z}$; в) $w = e^{z^2}$;

б) $w = |z| \cdot \overline{z}$; г) $w = |z-1|^2$.

2 Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

а) $w = \operatorname{sh} z$; б) $w = \ln z^2$.

3 Найти области аналитичности функций:

а) $w = \operatorname{tg} z$; г) $w = \dfrac{z\cos z}{1+z^2}$;

б) $w = z e^{-z}$; д) $w = \operatorname{cth} z$;

в) $w = \sin z + \overline{z}$; е) $w = z \ln z$.

4 Проверить гармоничность функций:

а) $u = x^2 + 2x - y^2$; в) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$; д) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

б) $u = x^2 - y^2 + 2xy$; г) $v = \ln\left(x^2+y^2\right)$; е) $v = 2e^x \sin y$.

5 Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по известной действительной $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ части:

а) $u = x^2 - y^2 + 2x$ при условии $f(i) = 2i - 1$;

б) $v = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy)$ при условии $f(0) = 0$;

в) $v = 2\cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2$ при условии $f(0) = 2$.

г) $u(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos 2xy$;

д) $u(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

е) $v(x,y) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$.

6 Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображениях $w = f(z)$ в указанных точках:

а) $w=e^z$, $z_1=\ln 2+i\dfrac{\pi}{4}$; $z_2=-1-i\dfrac{\pi}{2}$;

б) $w=z^2$, $z_1=2-i$; $z_2=1+i\dfrac{\pi}{2}$.

7 Найти области растяжения и сжатия при отображениях:

а) $w=e^z$; б) $w=\dfrac{1}{z}$.

8 Найти области конформности функций:

а) $w=2z$; б) $w=e^{-3z}$; в) $w=-iz^2$.

9 Найти образы окружности $x^2+y^2=2x$ при отображениях:

а) $w=z+1$; б) $w=\dfrac{1}{z}$; в) $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$.

Задания для домашней работы

1 Выяснить, в каких точках дифференцируемы функции:

а) $w=z\cdot e^z$; в) $w=\sin 3z-i$;

б) $w=|z|\cdot\operatorname{Re}\bar{z}$; г) $w=\ln z+e^{2z}$.

2 Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

а) $w=\sin\dfrac{z}{3}$; б) $w=e^{3z}$.

3 Найти области аналитичности функций:

а) $w=z\cos z$; в) $w=\bar{z}+\cos z$;

б) $w=\sin z\operatorname{Re} z$; г) $w=\dfrac{e^z}{z}$.

4 Проверить гармоничность функций:

а) $u=2e^x\cos y$; в) $u=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$; д) $u=\ln\left(x^2+y^2\right)$;

б) $u=x^2$; г) $v=\dfrac{x^2+1}{2}y^2$; е) $v=3x^2y-y^3$.

5 Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по известной действительной $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ части:

а) $u = 2\sin x \operatorname{ch} y - x$ при условии $f(0) = 0$;

б) $v = -2\sin 2x \operatorname{sh} 2y + y$ при условии $f(0) = 2$;

в) $v(x, y) = \sin 2y \cos 2x$;

г) $u(x, y) = e^{x+1} \cos y$;

д) $v(x, y) = \cos(x^2 - y^2) \sin 2xy$;

е) $u = -y(4x + 1)$;

ж) $v = y - e^{2x} \sin 2y$.

6 Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображениях $w = f(z)$ в указанных точках:

а) $w = z^3$, $z_1 = 2 + i$; $z_2 = 1 - i\dfrac{\pi}{2}$;

б) $w = \sin z$, $z_1 = 0$; $z_2 = 1 + i$.

7 Найти области растяжения и сжатия при отображениях

а) $w = \ln z$; б) $w = z^3$.

8 Найти области конформности функций:

а) $w = (z - 2)^2$; в) $w = \operatorname{sh}(1 - z)$;

б) $w = z^2 - 4z$; г) $w = |z|^2$.

9 Найти образы прямой $y = x - 1$ при отображениях:

а) $w = z + 1$; б) $w = \dfrac{1}{z}$; в) $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

Практическое занятие 3 Интегрирование функции комплексной переменной

3.1 Определение и свойства интеграла от функции комплексной переменной

3.2 Основная теорема Коши

3.3 Первообразная и неопределенный интеграл

3.1 Определение и свойства интеграла от функции комплексной переменной

Пусть $w = f(z)$ – однозначная функция комплексной переменной z, определенная на некоторой гладкой кривой Γ с началом в точке z_0 и концом в точке z_1. Кривая Γ может быть как замкнутой, так и незамкнутой. Направление движения по кривой Γ от начальной точки z_0 к конечной точке z_1 называется *положительным* направлением на кривой Γ и обозначается через Γ^+. Противоположное направление на кривой Γ называется *отрицательным* и обозначается Γ^-.

Разобьем кривую Γ на n частичных дуг произвольно выбранными точками ξ_0, ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_{n-1}, ξ_n, $\xi_n = z_1$, расположенными последовательно в положительном направлении кривой Γ причем $\xi_0 = z_0$, (рисунок 3. 1). На каждой частичной дуге $\xi_k \xi_{k+1}$, $k = 0,1,\cdots,n-1$, выберем произвольную точку ξ_κ^* и составим интегральную сумму $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_\kappa^*\right)\Delta\xi_\kappa$, где $\Delta\xi_\kappa = \xi_{\kappa+1} - \xi_\kappa$.

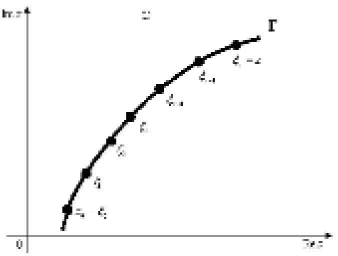

Рисунок 3. 1 – Разбиение кривой Γ

Интегралом от функции $f(z)$ вдоль кривой Γ в выбранном направлении называется предел $\lim\limits_{\max|\Delta\xi_\kappa|\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_\kappa^*\right)\Delta\xi_k$, не зависящий от способа разбиения кривой Γ на частичные дуги $\xi_\kappa\xi_{\kappa+1}$ и от выбора точек ξ_κ^*, $k=0,1,\cdots,n-1$:

$$\int\limits_\Gamma f(z)dz = \lim_{\max|\Delta\xi_\kappa|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_\kappa^*\right)\Delta\xi_k .$$

Если для функции $f(z)$, определенной на кривой Γ, данный предел существует, то говорят, что функция $f(z)$ *интегрируема по кривой* Γ. Кривая Γ называется *путем* или *контуром* интегрирования.

Интеграл от функции $f(z)$ в положительном направлении кривой Γ обозначается $\int\limits_{\Gamma^+} f(z)dz$, в отрицательном – $\int\limits_{\Gamma^-} f(z)dz$, в случае замкнутого контура Γ – $\oint\limits_\Gamma f(z)dz$.

Теорема 1 *Если функция $f(z)$ непрерывна на гладкой кривой Γ, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, а начальная и конечная точка дуги соответствуют значениям $t=\alpha$ и $t=\beta$, то интеграл существует $\int\limits_\Gamma f(z)dz$ и справедлива формула*

$$\int\limits_\Gamma f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt,\ z(t)=x(t)+iy(t).$$

Теорема 2 *(связь с криволинейным интегралом 2-го рода) Если функция $f(z)$ непрерывна на гладкой кривой Γ, то интеграл $\int\limits_\Gamma f(z)dz$ существует и справедлива формула*

$$\int\limits_\Gamma f(z)dz = \int\limits_\Gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_\Gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy .$$

Интегралы от функций комплексной переменной обладают свойствами:

– *линейность:* если функции $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны на кусочно-гладкой кривой Γ, то для любых c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$ имеет место равенство:

$$\int_\Gamma \left[c_1 f(z) \pm c_2 g(z)\right] dz = c_1 \int_\Gamma f(z)dz \pm c_2 \int_\Gamma g(z)dz;$$

– *ориентированность*: пусть Γ^+ и Γ^- – один и тот же путь интегрирования, проходимый соответственно в положительном или отрицательном направлении кусочно-гладкой кривой Γ, и функция $f(z)$ непрерывна на этой кривой. Тогда

$$\int_{\Gamma^+} f(z)dz = -\int_{\Gamma^-} f(z)dz;$$

– *аддитивность*: пусть кривая Γ состоит из кусочно-гладких кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$ и функция $f(z)$ непрерывна на Γ. Тогда

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\Gamma_n} f(z)dz;$$

причем направление на кривых Γ_k, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, совпадает с направлением на кривой Γ;

– если Γ произвольная кусочно-гладкая кривая с началом z_0 и концом z_1, то

$$\int_\Gamma dz = z_1 - z_0;$$

– если Γ гладкая кривая, замкнутая или незамкнутая, имеющая длину L, то

$$\int_\Gamma |dz| = L;$$

– *оценка интеграла*: для любой функции $f(z)$, непрерывной на гладкой кривой Γ, справедливо неравенство:

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \le \int_\Gamma |f(z)||dz|;$$

– если $\left|f(z)\right| \le M$, то во всех точках гладкой кривой Γ длины L справедливо неравенство:

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| \le M \cdot L .$$

3.2 Основная теорема Коши

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области D.

Теорема 3 (Коши) Если функция $f(z)$ аналитическая в области D, ограниченной контуром Γ, и γ – замкнутый контур в D, то $\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$.

Если при этом $f(z)$ непрерывна в $\bar{D}$, то $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$.

Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в n-связной области D, внешней границей которой является замкнутый кусочно-гладкий контур γ_0. И пусть $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n-1}$ – система замкнутых кусочно-гладких кривых, лежащих в области D и удовлетворяющих следующим условиям:

– кривые γ_k , $k = 0,1,\cdots,n-1$, принадлежат внутренности γ_0;

– для любого m , $m = 0,1,\cdots,n-1$, кривые γ_k при $k \ne m$ лежат во внешности γ_m;

– многосвязная область D получается из односвязной области, ограниченной замкнутой кривой γ_0, если из нее удалить односвязные области, ограниченные замкнутыми кривыми γ_k .

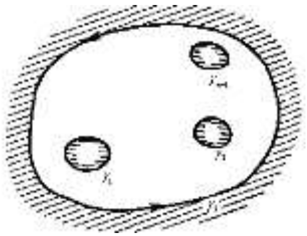

Рисунок 3. 2 – Многосвязная область D

Обозначим через Γ систему контуров, составленную из замкнутой кривой γ_0, проходимой в положительном направлении, и замкнутых кривых γ_k, $k = 0,1,\cdots,n-1$, проходимых в отрицательном направлении (рисунок 3. 2):

$$\Gamma = \gamma_0^+ + \gamma_1^- + \gamma_2^- + \cdots + \gamma_{n-1}^-$$

Т е о р е м а 4 Пусть функция $f(z)$ является:

1) аналитической функцией в многосвязной области D, ограниченной системой контуров $\Gamma = \gamma_0^+ + \gamma_1^- + \gamma_2^- + \cdots + \gamma_{n-1}^-$,

2) непрерывной в $\bar{D}$.

Тогда

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0 .$$

Из теоремы 4 следует:

$$\oint_{\gamma_0^+} f(z)dz = \oint_{\gamma_1^+} f(z)dz + \oint_{\gamma_2^+} f(z)dz + \cdots + \oint_{\gamma_{n-1}^+} f(z)dz .$$

Т е о р е м а 5 Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D. Тогда интеграл от функции $f(z)$ не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от начальной точки z_0 и конечной точки z пути интегрирования.

3.3 Первообразная и неопределенный интеграл

Пусть функция $f(z)$ определена в области D (односвязной или многосвязной). *Первообразной* функции $f(z)$ в области D называется такая функция $F(z)$, что в каждой точке $z \in D$ выполняется равенство $F'(z) = f(z)$.

Т е о р е м а 6 Если $F(z)$ – первообразная функции $f(z)$ в области D, то совокупность всех первообразных функции $f(z)$ определяется формулой $F(z)+c$, где c – произвольная постоянная.

Совокупность всех первообразных $F(z)$, функции $f(z)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(z)$ и обозначается:

$$\int f(z)dz = F(z) + c\,.$$

Теорема 7 (формула Ньютона-Лейбница) Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области D, то интеграл от $f(z)$ вдоль любого кусочно-гладкого контура, соединяющего две любые точки z_0 и z_1 этой области и лежащего целиком в ней, равен

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = F(z_1) - F(z_0)\,.$$

Интегралы от элементарных функций комплексной переменной в области их аналитичности вычисляются с помощью тех же формул и методов, что и в случае действительной переменной.

Замена переменной в интегралах от функций комплексной переменной производится аналогично случаю функции действительной переменной. Пусть аналитическая функция $z = \varphi(w)$ отображает взаимно однозначно контур γ в плоскости $\mathbf{W}$ на контур Γ в плоскости □ . Тогда справедлива формула замены переменной:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f\left(\varphi(w)\right)\varphi'(w)dw$$

Если путь интегрирования является полупрямой, выходящей из точки z_0, или окружностью с центром в точке z_0, то целесообразно использовать замену $z - z_0 = re^{i\varphi}$. В первом случае $\varphi = \mathrm{const}$, а r – действительная переменная интегрирования, во втором случае $r = \mathrm{const}$, а φ – действительная переменная интегрирования.

Вопросы для самоконтроля

1 Какое направление движения по кривой называется: а) положительным, б) отрицательным?

2 Что называется интегралом от функции комплексной переменной?

3 Как связаны интеграл от функции комплексной переменной по кривой и криволинейный интеграл 2-го рода?

4 Перечислите свойства интеграла от функции комплексной переменной.

5 Сформулируйте основную теорему Коши: а) для односвязной области, б) для многосвязной области.

6 Что называется первообразной для функции комплексной переменной?

7 Дайте определение неопределенного интеграла для функции комплексной переменной и запишите формулу Ньютона-Лейбница.

8 По какой формуле осуществляется замена переменной в интеграле от функции комплексной переменной?

9 Для каких путей интегрирования целесообразна замена $z - z_0 = re^{i\varphi}$?

Решение типовых примеров

1 Вычислить интегралы

а) $\int\limits_0^i z^2 dz$; б) $\oint\limits_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^n dz$ при $n \neq 1$; в) $\int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z - z_0}$.

Решение. а) по формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int\limits_0^i z^2 dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^i = -\frac{i}{3};$$

б) параметрические уравнения окружности с центром в точке z_0 имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t, \\ y = y_0 + R\sin t. \end{cases}$$

Отсюда комплексно-параметрическое уравнение окружности есть

$$z = z_0 + R \cdot e^{it}, \ 0 \le t \le 2\pi .$$

Тогда по теореме 1 получим:

$$\int\limits_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^n \, dz = \left[z = z_0 + R \cdot e^{it} \right] = \int\limits_0^{2\pi} \left(R \cdot e^{it} \right)^n R \cdot i \cdot e^{it} dt =$$

$$= i \cdot R^{n+1} \cdot \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = i \cdot R^{n+1} \cdot \left. \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{R^{n+1}}{n+1} \cdot \left(\cos 2\pi(n+1) + i \sin 2\pi(n+1) - e^0 \right) = \frac{R^{n+1}}{n+1}(1-1) = 0 ;$$

в) имеем:

$$\int\limits_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z - z_0} = \left[z = z_0 + R \cdot e^{it} \right] = \int\limits_0^{2\pi} \frac{iR \cdot e^{it}}{R \cdot e^{it}} dt = i \cdot \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i .$$

2 Вычислить $\int\limits_{\Gamma} \left(\overline{z} + z^2 \right) dz$, где Γ – отрезок прямой $y = x$, соединяющий точки $z_0 = 0$ и $z_1 = 1 + i$.

Решение. <u>1 способ</u>. Так как контур интегрирования – прямая $y = x$, сделаем замену $z = re^{i\varphi}$. Тогда

$$\overline{z} = re^{-i\varphi}, \ z^2 = r^2 e^{2i\varphi},$$

где φ является постоянным и $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Таким образом,

$$z = re^{i\frac{\pi}{4}}, \ \overline{z} = re^{-i\frac{\pi}{4}}, \ z^2 = r^2 e^{i\frac{\pi}{2}}; \ dz = e^{i\frac{\pi}{4}} dr .$$

В точке $z_0 = 0$ имеем $r = 0$, а в точке $z_1 = 1 + i$ получим:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} .$$

Тогда по теореме 1 получим:

$$\int\limits_{\Gamma} \left(\overline{z} + z^2 \right) dz = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(re^{-i\frac{\pi}{4}} + r^2 e^{i\frac{\pi}{2}} \right) e^{i\frac{\pi}{4}} dr = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(r + r^2 e^{i\frac{3}{4}\pi} \right) dr =$$

$$=\left(\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{3}e^{i\frac{3}{4}\pi}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=1+\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)=$$

$$=1+\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i\ .$$

2 способ. Выделим действительную и мнимую части исходной функции:

$$\overline{z}+z^2=x-iy+x^2-y^2+2xyi=\left(x+x^2-y^2\right)+i\left(2xy-y\right).$$

Отсюда

$$u(x,y)=x+x^2-y;$$

$$v(x,y)=2xy-y\ .$$

Тогда по теореме 2 получим

$$\int\limits_{\Gamma}\left(\overline{z}+z^2\right)dz=\int\limits_{\Gamma}\left(x+x^2-y^2\right)dx-\left(2xy-y\right)dy+$$

$$+i\int\limits_{C}\left(2xy-y\right)dx+\left(x+x^2-y^2\right)dy=\left\|\begin{matrix}y=x; & x_0=0\\ dy=dx; & x_1=1\end{matrix}\right\|=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x+x^2-x^2-2x^2+x\right)dx+i\int\limits_0^1\left(2x^2-x+x+x^2-x^2\right)dx=$$

$$=2\int\limits_0^1\left(x-x^2\right)dx+2i\int\limits_0^1 x^2dx=2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1+2i\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}i=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i\ .$$

3 Вычислить $\int\limits_{\Gamma}\left(z^2-z\right)dz$, где Г – часть окружности $|z|=1$, расположенная в верхней полуплоскости.

Решение. Положим $z=re^{i\varphi}$. Так как $|z|=1$, то $r=1$ и $z=e^{i\varphi}$. Тогда $dz=ie^{i\varphi}d\varphi$ и $0\le\varphi\le\pi$ по условию.

Тогда по теореме 1 получим

$$\int\limits_{\Gamma}\left(z^2-z\right)dz=\int\limits_0^{\pi}\left(e^{2i\varphi}-e^{i\varphi}\right)ie^{i\varphi}d\varphi=i\int\limits_0^{\pi}\left(e^{3i\varphi}-e^{2i\varphi}\right)d\varphi=$$

$$= i\left(\frac{1}{3i}e^{3i\varphi} - \frac{1}{2i}e^{2i\varphi}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{3}\left(e^{3\pi i} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(e^{2\pi i} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos 3\pi + i\sin 3\pi - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-1-1\right) - \frac{1}{2}\left(1-1\right) = -\frac{2}{3}.$$

4 Вычислить $\int\limits_{\Gamma} e^{\overline{z}}\,dz$, где Γ – отрезок прямой $y = -x$, соединяющей точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \pi - i\pi$

Решение. Параметрические уравнения контура Γ есть $x = t$, $y = -t$ или $z = t - it$, где действительное t изменяется от 0 до π. Тогда по теореме 1 получим

$$\int\limits_{\Gamma} e^{\overline{z}}\,dz = \int\limits_0^{\pi} e^{t+it}\left(1-i\right)dt = \left(1-i\right)\int\limits_0^{\pi} e^{t(1+i)}dt = \frac{1-i}{1+i}e^{t(1+i)}\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1-i}{1+i}\left(e^{\pi(1+i)} - 1\right) = \frac{\left(1-i\right)^2}{2}\left(e^{\pi}e^{\pi i} - 1\right) =$$

$$= \frac{1-2i-1}{2}\left(e^{\pi}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) - 1\right) = -i\left(e^{\pi}\left(-1 + i\cdot 0\right) - 1\right) =$$

$$= \left(e^{\pi} + 1\right)i.$$

5 Вычислить $\int\limits_{1-i}^{2+i}\left(2z+3\right)dz$.

Решение. Функция $f\left(z\right) = 2z + 3$ аналитична всюду на $\mathbb{C}$. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, получаем

$$\int\limits_{1-i}^{2+i}\left(2z+3\right)dz = \left(z^2 + 3z\right)\Big|_{1-i}^{2+i} = \left(2+i\right)^2 + 3\left(2+i\right) - \left(1-i\right)^2 - 3\left(1-i\right) =$$

$$= 4 + 4i - 1 + 6 + 3i - 1 + 2i + 1 - 3 + 3i = 6 + 12i.$$

Задания для аудиторной работы

Вычислить интегралы:

1 $\int\limits_{\Gamma}\left(\left(y+1\right)-xi\right)dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=1$, $z_2=-i$.

2 $\int\limits_{\Gamma}\overline{z}\,\mathrm{Re}\,z dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=-2-i$, $z_2=1+2i$.

3 $\int\limits_{\Gamma}\left(1+i-2\overline{z}\right)dz$, где Γ – парабола $y=x^2$, соединяющая точки $z_1=0$, $z_2=1+i$.

4 $\int\limits_{\Gamma}\left(z^2+z\overline{z}\right)dz$, где Γ – дуга окружности $|z|=1$, $0\le\arg z\le\pi$.

5 $\int\limits_{1+i}^{2-i}\left(3z^2+2z\right)dz$.

6 $\int\limits_{0}^{i}z\cos z dz$.

7 $\int\limits_{\Gamma}\mathrm{Re}\,z dz$, где Γ есть кривая $z=\left(2+i\right)t$, $0\le t\le 1$.

8 $\int\limits_{\Gamma}\left(iz^2-2ze^{z^2}\right)dz$, где Γ – произвольная линия, соединяющая точки $z_1=e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_2=i$.

9 $\int\limits_{\Gamma}\left(1+2i-2\overline{z}\right)dz$, где Γ – ломаная $z_1z_2z_3$, где $z_1=0$, $z_2=1+i$, $z_3=1$.

10 $\int\limits_{c}z\,\mathrm{Im}\,z^2dz$, где Γ есть $|z|=1$ $\left(-\pi\le\arg z\le 0\right)$.

11 $\int\limits_{1+i}^{-1-i}\left(2z+1\right)dz$.

12 $\int\limits_{\Gamma}\ln z dz$, где Γ есть $|z|=1$, обход против часовой стрелки.

13 $\int\limits_{0}^{i+1} z^3 dz$.

14 $\int\limits_{\Gamma} \operatorname{Im} z dz$, где Γ есть $z = (2+3i)t$ $(0 \le t \le 1)$.

Задания для домашней работы

Вычислить интегралы:

1 $\int\limits_{\Gamma} \left(x^2 + y^2 i\right) dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2+3i$.

2 $\int\limits_{\Gamma} \left(1+i-2\overline{z}\right) dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1+i$.

3 $\int\limits_{\Gamma} e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1+i$.

4 $\int\limits_{\Gamma} z \operatorname{Re} z dz$, где Γ есть $|z| = 1$, обход против часовой стрелки.

5 $\int\limits_{1}^{i} z e^z dz$.

6 $\int\limits_{\Gamma} \cos z dz$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $z_2 = \pi + i$.

7 $\int\limits_{1+i}^{2i} \left(z^3 - z\right) e^{\frac{z^2}{2}} dz$.

8 $\int\limits_{1}^{i} \dfrac{\ln(z+1)}{z+1} dz$ по дуге окружности $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \ge 0$, $\operatorname{Re} z \ge 0$.

9 $\int\limits_{\Gamma} \operatorname{Re} z dz$, где Γ – ломаная, состоящая из отрезка $[0;2]$ действительной оси и отрезка, соединяющего точки $z_1 = 2$, $z_2 = 2 + i$.

10 $\int\limits_{\Gamma} e^z dz$, где Γ а) дуга параболы $y = x^2$, соединяющая точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$; б) отрезок прямой, соединяющий эти же точки.

11 $\int\limits_0^i \left(3z^4 - 2z^3\right) dz$.

12 $\int\limits_{\Gamma} z \cdot \bar{z} dz$, где Γ есть $|z| = 1$, обход против часовой стрелки.

13 $\int\limits_0^{1+i} \left(z^2 - 2z\right) dz$.

Практическое занятие 4 **Интегральная формула Коши**

4.1 Интегральная формула Коши
4.2 Интеграл типа Коши

4.1 Интегральная формула Коши

Теорема 1 (интегральная формула Коши) Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D. Тогда для любой точки $z_0 \in D$ справедливо равенство

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz ,$$

где Γ – кусочно-гладкий замкнутый контур, целиком лежащий в области D и охватывающий точку z_0.

Интеграл $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$, стоящий в правой части равенства теоремы 1, называется *интегралом Коши* функции $f(z)$.

Если в условиях теоремы точка z_0 расположена вне области, ограниченной контуром Γ, то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0 .$$

Теорема 2 (о среднем) Значение аналитической функции $f(z)$ в любой точке z_0 области D, в которой функция $f(z)$ является аналитической, равно среднему арифметическому ее значений на любой окружности с центром в точке z_0, целиком лежащей в области D.

Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитическая в односвязной области D. Если в области D постоянна действительная часть $u(x, y)$ функции $f(z)$ или постоянен модуль функции $f(z)$, то функция $f(z)$ постоянна в области D.

Теорема 3 (о максимуме модуля) Пусть функция $f(z)$, не равная тождественно постоянной, является аналити-

ческой в области D и непрерывна в $\bar{D}$. Тогда максимальное (минимальное) значение модуля $\left|f(z)\right|$ достигается только на границе области $\bar{D}$.

Другими словами, модуль $\left|f(z)\right|$ не может достигать максимума (минимума) внутри области D кроме случая, когда $f(z) = \text{const}$.

4.2 Интеграл типа Коши

Пусть в плоскости комплексного переменного $\mathbb{C}$ задана произвольная кусочно-гладкая кривая Γ (замкнутая или незамкнутая) и на ней – произвольная непрерывная функция $f(z)$.

Интеграл

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz,$$

где ζ – произвольная точка комплексной плоскости, не лежащая на кривой Γ, называется *интегралом типа Коши*. Интеграл Коши является частным случаем интеграла типа Коши.

Т е о р е м а 4 Пусть Γ – кусочно-гладкая кривая, расположенная в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $f(z)$ – непрерывная функция на этой кривой. Тогда функция $\Phi(\zeta)$ является: а) аналитической в любой области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, не содержащей точек кривой Γ, б) бесконечно дифференцируемой в области D, причем ее производная любого порядка n может быть получена по формуле

$$\Phi^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}} dz.$$

С л е д с т в и е 1 Производные любого порядка от функции $\Phi(\zeta)$, аналитической в области D, также являются аналитическими в этой области.

С л е д с т в и е 2 Пусть $f(z)$ аналитическая в области D функция и на ее границе Γ. Тогда функция $f(z)$ бесконечно *дифференцируема в этой области и ее производная* n*-го порядка в точке* $z_0 \in D$ *находится по формуле*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \; n = 1, 2, \ldots .$$

Следствие 3 В любой точке z *области* D*, в которой функция* $f(z)$ *является аналитической, справедливы неравенства Коши*

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \le \frac{n! \cdot M(\rho)}{\rho^n}, \; n = 1, 2, \ldots ,$$

где ρ *— радиус произвольной окружности* c_ρ *с центром в точке* z_0*, целиком лежащей в области* D*;* $M(\rho)$ *– наибольшее значение модуля функции* $f(z)$ *на окружности* c_ρ*.*

Теорема 5 (Коши-Лиувилля) Если функция $f(z)$ *аналитична во всей комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ *и ограничена по модулю, то она постоянна.*

Теорема 6 (Морера) Если функция $f(z)$ *непрерывна в области* D *и интеграл* $\int\limits_{\Gamma} f(z) dz = 0$ *по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру* Γ*, лежащему в области* D*, то* $f(z)$ *является аналитической функцией в области* D*.*

Из условия теоремы следует, что в области D интеграл $\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta$ не зависит от пути Γ интегрирования, соединяющего фиксированную точку z_0 с произвольной точкой z (z_0 и z лежат в области D) и определяет аналитическую функцию z

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta ,$$

для которой $F'(z) = f(z)$, $z \in D$.

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте теорему об интегральной формуле Коши.

2 В чем суть теоремы о среднем для функции комплексной переменной?

3 В чем состоит принцип максимума модуля аналитической функции?

4 Какой интеграл называется интегралом типа Коши?

5 Какими свойствами обладает интеграл типа Коши?

6 Сформулируйте теорему Коши-Лиувилля.

7 В чем суть теоремы Морера?

Решение типовых примеров

1 Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$, если Γ есть окружность, определяемая уравнением:

а) $|z-2|=1$; б) $|z-2|=3$; в) $|z-2|=5$.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ будут точки, обращающие в нуль знаменатель, т. е. $z^2-6z=0$. Решая уравнение, получим две особые точки $z_1=0$, $z_2=6$.

а) внутри области D, ограниченной окружностью $|z-2|=1$, нет особых точек функции $f(z)$, т. е. $f(z)$ аналитична в области D. В силу теоремы Коши (практическое занятие 3) имеем

$$\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=0;$$

б) внутри области, ограниченной окружностью $|z-2|=3$, лежит точка $z_1=0$. По интегральной формуле Коши имеем:

$$\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz=2\pi i\frac{e^{z^2}}{z-6}\Big|_{z=0}=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{\pi i}{3};$$

в) в области, ограниченной окружностью $|z-2|=5$, лежат обе особые точки: $z_1=0$ и $z_2=6$. Непосредственно применять интегральную формулу Коши нельзя. Вычислить данный интеграл можно двумя способами.

<u>*1 способ*</u> Разложим дробь $\dfrac{1}{z^2-6z}$ на простейшие:

$$\frac{1}{z^2-6z}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z}.$$

Подставляя в интеграл и применяя интегральную формулу Коши, получим:

$$\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=\frac{1}{6}\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z-6}dz-\frac{1}{6}\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z}dz=$$

$$=\frac{1}{6}2\pi ie^{z^2}\Big|_{z=6}-\frac{1}{6}2\pi ie^{z^2}\Big|_{z=0}=\frac{\pi i}{3}\left(e^{36}-1\right).$$

<u>*2 способ*</u> Построим окружности γ_1 и γ_2 с центрами в точках $z_1=0$ и $z_2=6$ малых радиусов таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали в круге $|z-2|\le 5$. В трехсвязной области, ограниченной окружностями $|z-2|=5$, γ_1 и γ_2 подынтегральная функция аналитична всюду. По теореме Коши для многосвязной области (практическое занятие 3) имеем

$$\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz+\oint\limits_{\gamma_2}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=$$

$$=2\pi i\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\Big|_{z=0}+2\pi i\frac{e^{z^2}}{z}\Big|_{z=6}=$$

$$=-\frac{\pi i}{3}+\frac{\pi i}{3}e^{36}=\frac{\pi i}{3}\left(e^{36}-1\right).$$

2 Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{e^z\cdot\cos\pi z}{z^2+2z}dz$, где окружность обходится в положительном направлении.

Решение. Внутри области, ограниченной окружностью $|z|=1$, находится точка $z=0$, в которой знаменатель функции $f(z)=\dfrac{e^z\cdot\cos\pi z}{z^2+2z}$ обращается в нуль.

Перепишем заданный интеграл так

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z\cdot\cos\pi z}{z^2+2z}d\zeta=\oint\limits_{|z|=1}\frac{\dfrac{e^z\cdot\cos\pi z}{z+2}}{z}.$$

Функция $f(z)=\dfrac{e^z\cdot\cos\pi z}{z+2}$ является аналитической в круге $|z|\le 1$. Применяя интегральную формулу Коши в точке $z_0=0$ получим

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z\cdot\cos\pi z}{z^2+2z}dz=2\pi\, i\cdot f(0)=2\pi\, i\cdot\frac{1}{2}=\pi\, i.$$

3 Вычислить интегралы

а) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{\sin\pi z}{\left(z^2-1\right)^2}dz$;   б) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz$.

Решение. а) особые точки функции $z_1=1$, $z_2=-1$. В области $|z-1|\le 1$ лежит точка $z_1=1$.

Преобразуем подынтегральную функцию:

$$f(z)=\frac{\sin\pi z}{\left(z^2-1\right)^2}=\frac{\sin\pi z}{(z-1)^2(z+1)^2}=\frac{\dfrac{\sin\pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}.$$

Тогда по следствию 2 теоремы 4 получим

$$\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{\sin\pi z}{\left(z^2-1\right)^2}dz=\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{\dfrac{\sin\pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{\sin\pi z}{\left(z^2+1\right)^2}\right)'\Bigg|_{z=1}=$$

$$=2\pi i\frac{2\pi\cos\pi-2\sin\pi}{2^3}=2\pi i\cdot\frac{(-2\pi)}{8}=-\frac{\pi^2 i}{2};$$

б) подынтегральная функция $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3}$ является аналитической в области $|z|\le 1$ всюду, кроме точки $z=0$. Функция $f(z)=\cos z$ является всюду аналитической в круге $|z|\le 1$. При $n=2$ по следствию 2 теоремы 4 имеем

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}f''(0).$$

Так как $f''(z)=-\cos z$ и $f''(0)=-1$, то

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz=\pi\cdot i\cdot(-1)=-\pi\cdot i\,.$$

Задания для аудиторной работы

Вычислить интегралы (обход по контуру в положительном направлении):

1 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z^2+2z}dz$.

2 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}(z+i)}{z^2-2z}dz$.

3 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\cos z}{z^3}dz$.

4 $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}}\dfrac{1}{z^3}\cos\dfrac{\pi}{z+1}dz$.

5 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{\operatorname{tg} z}{ze^{\frac{1}{z+2}}}dz$.

8 $\oint\limits_{|z-1|=2}\dfrac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}dz$.

9 $\oint\limits_{|z|=5}\dfrac{dz}{z^2+16}$.

10 $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z\operatorname{sh} z}{\left(z^2-1\right)^2}dz$.

11 $\oint\limits_{|z-2|=1}\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{\left(z^2+4\right)^2}dz$.

12 $\oint\limits_{|z-3|=6}\dfrac{zdz}{(z-2)^3(z+4)}$.

6 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z}{\left(z^2-1\right)^2} dz$.

13 $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{e^{z^2}}{z-1} dz$.

7 $\oint\limits_{|z-i|=4} \frac{e^{z+1}}{(z-1)^2 \cdot (z+2)} dz$.

14 $\oint\limits_{|z+i|=3} \frac{\sin \frac{i\pi z}{2}}{(z-2) z^2} dz$.

Задания для домашней работы

Вычислить интегралы (обход по контуру в положительном направлении):

1 $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz$.

2 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z \, \sin(z-1)}{z^2-z} dz$.

3 $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3-4z^2} dz$.

4 $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1-\sin z}{z^2} dz$.

5 $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z\left(e^z+2\right)} dz$.

6 $\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{z dz}{(z-2)^3 \cdot (z+4)}$.

7 $\oint\limits_{|z-i|=4} \frac{\sin z}{z-1} dz$.

8 $\oint\limits_{|z+2|=2} \frac{\operatorname{th} \pi z}{z+1} dz$.

9 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2-4z+3} dz$.

10 $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3} dz$.

11 $\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{\left(z^2-1\right)^2} dz$.

12 $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{(z-1)^2 (z-3)} dz$.

13 $\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{\left(z^2+9\right) \cdot (z+9)}$.

14 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z \, dz}{(z+1)^3 \cdot (z-1)}$.

15 $\oint\limits_{|z+2|=4} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi z}{2}}{(z+3) \cdot (z-1)^2} dz$.

16 $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{ch} i \frac{\pi}{2} z}{(z-3)^2 (z-2)} dz$.

Практическое занятие 5 Ряды аналитических функций

5.1 Ряды комплексных чисел
5.2 Функциональные ряды
5.3 Степенные ряды

5.1 Ряды комплексных чисел

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \ ,$$

где $a_k \in \mathbb{C}$, называется *числовым рядом с комплексными членами*, a_k – общим членом ряда.

Если положить $a_k = \alpha_k + i\beta_k$, $k \in \mathbb{N}$, α_k , $\beta_k \in \mathbb{R}$, то ряд с комплексными членами запишется в виде $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$.

Сумма $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k + i\beta_k$ называется *частичной* суммой ряда, а сумма $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ называется *остатком* ряда.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ называется *сходящимся*, если существует предел последовательности частичных сумм $\left(S_n\right)$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \ ,$$

комплексное число S называется *суммой* ряда.

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ сходится, то его общий член $\alpha_k + i\beta_k$ стремится к нулю при $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} \left(\alpha_k + i\beta_k\right) = 0 \ .$$

В случае сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ его остаток r_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Добавление или отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k + i\beta_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд с действительными положительными членами $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\alpha_k + i\beta_k\right|$. В случае абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k + i\beta_k$ имеем абсолютную сходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k$.

Очевидно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k + i\beta_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из рядов $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k$. При этом $S = S_1 + iS_2$, где S_1 – сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$, S_2 – сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k$.

Данное утверждение позволяет проводить исследование сходимости рядов с комплексными членами, основываясь на сходимости рядов с действительными членами. Для исследования применяются признаки сравнения рядов, Даламбера, Коши и другие достаточные признаки сходимости рядов.

5.2 Функциональные ряды

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k\left(z\right)$, членами которого являются функции $u_k\left(z\right)$ комплексной переменной z, называется *функциональным* рядом.

Точка z_0 называется *точкой сходимости* ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k\left(z\right)$, если сходится соответствующий числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k\left(z_0\right)$. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k\left(z\right)$ называется *сходящимся в области* D, если он сходится в каждой точке этой области. Совокупность всех точек сходимости называется *областью сходимости* функционального ряда. В общем случае область сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ может быть многосвязной и замкнутой.

Суммой функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ в области D называется функция $f(z)$, которая в каждой точке $z_0 \in D$ равна значению соответствующего числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z_0)$:

$$f(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z_0).$$

Другими словами, функция $f(z)$ является суммой функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ в точке z_0 области D, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что $\left| f(z_0) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z_0) \right| < \varepsilon$ при $n > N$. В общем случае номер N зависит от выбора значений ε и точек z_0.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ называется *равномерно сходящимся* к функции $f(z)$ в области D, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что $\left| f(z_0) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z_0) \right| < \varepsilon$ при $n > N$ и $\forall\ z \in D$. Значение N зависит только от ε и одинаково для любых $z \in D$.

Теорема 1 (критерий Коши) Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ равномерно сходится в области D тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для любых $k > N$ и $p \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства:

$$\left| u_{k+1}(z) + u_{k+2}(z) + \ldots + u_{k+p}(z) \right| < \varepsilon, \quad \forall\ z \in D.$$

Теорема 2 (признак Вейерштрасса) Пусть

1) функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ *сходится в области* D*;*

2) члены ряда удовлетворяют неравенствам

$$\left|u_k(z)\right| \le a_k,\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, z \in D;$$

3) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ *сходится абсолютно и равномерно в области* D.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *мажорантным* рядом для $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$.

Равномерно сходящиеся функциональные ряды обладают *свойствами*:

– *непрерывность*: сумма равномерно сходящегося в области D ряда, состоящего из непрерывных функций, есть функция, непрерывная в области D;

– *интегрирование*: равномерно сходящийся в области D ряд непрерывных функций можно интегрировать вдоль любой кусочно-гладкой кривой Γ, целиком лежащей в области D, и справедлива формула

$$\int\limits_{\Gamma}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\right)dz = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Gamma} u_k(z)\,dz;$$

– *дифференцирование* равномерно сходящийся в области D ряд аналитических функций можно дифференцировать любое число раз в области D и справедлива формула

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(n)}(z).$$

5.3 Степенные ряды

Ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(z - z_0\right)^k$$

называется *степенным рядом* по степеням $\left(z - z_0\right)$. Здесь $c_k \in \mathbb{C}$ – коэффициенты ряда, $z_0 \in \mathbb{C}$ – фиксированная точка.

Теорема 3 (Абеля) Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(z - z_0\right)^k$ *сходится в точке* z_1*, то он сходится во всех точках* z*, удовлетворяющих условию* $\left|z - z_0\right| < \left|z_1 - z_0\right|$*, причем сходимость будет равномерной в любом круге* $\left|z - z_0\right| \le R$*,* $R < \left|z_1 - z_0\right|$*. Если степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(z - z_0\right)^k$ *расходится в точке* z_2*, то он расходится во всех точках* z*, удовлетворяющих условию* $\left|z - z_0\right| > \left|z_2 - z_0\right|$.

Для степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(z - z_0\right)^k$, имеющего как точки сходимости (кроме z_0, где ряд всегда сходится), так и точки расходимости, всегда существует такое действительное число $R > 0$, что внутри круга $\left|z - z_0\right| < R$ ряд сходится, а вне этого круга – расходится.

Область $\left|z - z_0\right| < R$ называется *кругом сходимости*, а число R – *радиусом сходимости* степенного ряда.

Радиус сходимости R вычисляется:

– по формуле Коши-Адамара $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|c_k\right|}}$,

– по формуле $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{c_k}{c_{k+1}}\right|$, если этот предел существует.

Если $R=0$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(z-z_0\right)^k$ сходится лишь в точке z_0; если $R=\infty$, то ряд сходится на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Внутри круга сходимости $\left|z-z_0\right|<R$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(z-z_0\right)^k$ сходится к аналитической функции.

Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно интегрировать и почленно дифференцировать любое число раз. При этом радиус сходимости каждого вновь полученного ряда равен радиусу сходимости исходного ряда, а над суммой ряда выполняется то же действие, что и над самим рядом.

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте определение ряда комплексных чисел?

2 Как исследовать ряд комплексных чисел на сходимость?

3 Какой ряд с комплексными числами называется абсолютно сходящимся?

4 Какой ряд называется функциональным рядом?

5 Что называется точкой сходимости и областью сходимости функционального ряда?

6 Какой функциональный ряд называется равномерно сходящимся?

7 Какая сходимость функционального ряда сильнее: точечная или равномерная?

8 Перечислите основные свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

9 Какой ряд называется степенным?

10 Что называется: а) радиусом сходимости, б) кругом сходимости степенного ряда?

11 Когда можно почленно дифференцировать и интегрировать степенные ряды?

Решение типовых примеров

1 Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{ik}}{k^2}$.

Решение. По формуле Эйлера общий член ряда можно записать в виде

$$e^{ik}=\cos k+i\sin k.$$

Рассмотрим два ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k}{k^2} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k^2}$$

Так как $\frac{|\cos k|}{k^2}\le\frac{1}{k^2}$ и $\frac{|\sin k|}{k^2}\le\frac{1}{k^2}$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится, то оба ряда сходятся. Значит, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{ik}}{k^2}$ сходится.

2 Найти сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k$.

Решение. Каждый коэффициент ряда равен 1, поэтому радиус сходимости $R=1$. Заданный ряд является рядом геометрической прогрессии, для которого

$$S_n(z)=1+(z-z_0)+\ldots+(z-z_0)^n=\frac{1-(z-z_0)^{n+1}}{1-(z-z_0)}.$$

Поэтому сумма ряда есть аналитическая функция

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}S_n(z)=\frac{1}{1-(z-z_0)}.$$

3 Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{(z-i)^k}.$$

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Так как

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)(z-i)^k}{k(z-i)^{k+1}}\right|=\frac{1}{|z-i|},$$

то согласно признаку д’Аламбера ряд сходится абсолютно при условии $\frac{1}{|z-i|}<1$. Отсюда $|z-i|>1$. Значит, ряд сходится абсолютно вне круга с центром в точке $z_0=i$ радиуса 1. При $|z-i|=1$ имеем расходящийся числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} k$.

4 Найти область точечной и равномерной сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^k - z^{k+1}\right).$$

Решение. Составим частичные суммы ряда

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\left(z^k - z^{k+1}\right)=1-z^{n+1}.$$

Предел $\lim_{n\to\infty} S_n(z)=\lim_{n\to\infty}\left(1-z^{n+1}\right)$ существует только при $|z|<1$ и в точке $z=1$. Поэтому областью точечной сходимости ряда является область $D=\left\{z \mid |z|<1 \text{ и } z=1\right\}$ и сумма ряда в каждой точке этой области равна

$$S(z)=\begin{cases} 1 & \text{при } |z|<1, \\ 0 & \text{при } z=1. \end{cases}$$

Рассмотрим остаток ряда

$$r_n(z)=S(z)-S_n(z)=\begin{cases} z^{n+1} & \text{при } |z|<1, \\ 0 & \text{при } z=1. \end{cases}$$

В силу произвольности ε_0, положим $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$. Возьмем последовательность точек $z_n=2^{-\frac{1}{n+1}}e^{-i\varphi_n}$ таких, что $z_n\in D$ и $\forall\ \varphi_n\in\mathbb{R}$. Так как

$$\left|r_n(z_n)\right|=\frac{1}{2}>\frac{1}{4},$$

то по определению равномерной сходимости неравенство $\left|r_n(z)\right|<\varepsilon$ выполняется не для любого $z\in D$.

Значит, в области D функциональный ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\left(z^k - z^{k+1}\right)$ сходится неравномерно.

5 Найти область сходимости и область равномерной сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-i)^k}{(k+1)^2 2^k}$.

Решение. Радиус сходимости есть

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}(k+2)^2}{(k+1)^2 2^k}\right| = 2.$$

Следовательно, ряд сходится в круге $|z-i|<2$. На границе круга при $|z-i|=2$ получим ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}$, который является сходящимся. Поэтому исходный ряд сходится в замкнутом круге $|z-i|\le 2$.

Для всех z из круга сходимости $|z-i|\le 2$ имеем:

$$\left|\frac{(z-i)^k}{(k+1)^2 2^k}\right| \le \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-i)^k}{(k+1)^2 2^k}$ сходится абсолютно и равномерно в круге $|z-i|\le 2$.

6 Найти радиус сходимости и область равномерной сходимости рядов:

а) $\sum_{k=0}^{\infty}\cos ik\, z^k$; б) $\sum_{k=0}^{\infty}(1+i)^k z^k$.

Решение. а) преобразуем коэффициенты ряда

$$c_k = \cos ik = \frac{e^k + e^{-k}}{2} = \operatorname{ch} k.$$

Тогда радиус сходимости равен

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{|c_k|}{|c_{k+1}|}=\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{ch}k}{\operatorname{ch}(k+1)}=\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{ch}k}{\operatorname{ch}k\operatorname{ch}1+\operatorname{sh}k\operatorname{sh}1}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\operatorname{ch}1+\operatorname{th}k\operatorname{sh}1}=\frac{1}{\operatorname{sh}1+\operatorname{ch}1}=e^{-1}.$$

Здесь учитывалось, что

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{th}k=\lim_{k\to\infty}\frac{e^k-e^{-k}}{e^k+e^{-k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1-e^{-2k}}{1+e^{-2k}}=1.$$

Следовательно, $R=e^{-1}$ и область равномерной сходимости ряда есть $|z|<e^{-1}$;

б) коэффициенты ряда $c_k=(1+i)^k$. Тогда

$$|c_k|=\left|(1+i)^k\right|=|1+i|^k=\left(\sqrt{2}\right)^k=2^{\frac{k}{2}}.$$

Отсюда

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{2^{\frac{k}{2}}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, радиус $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и область равномерной сходимости ряда есть $|z|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Задания для аудиторной работы

1 Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos ik}{2^k}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos ik^2}{5^{k^2}}$; ж) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sh}i\sqrt{k}}{\sin ik}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e^{i\frac{\pi}{k}}}{\sqrt{k}}$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{ch}i\dfrac{\pi}{k}}{k^{\ln k}}$; и) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin ik}{2^k}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e^{ik^2}}{k^3}$; е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{2+i}{3}\right)^k$; к) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{i^k}{k}$.

2 Найти области сходимости и область равномерной сходимости функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{(z-1)^k}{k^2}$; г) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{1-i}\right)^k$; ж) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{(1+i)^k}$;

б) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+i)z^k$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\operatorname{ch}\dfrac{i}{k}z^k$; и) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{ik}z^k$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\cos^k\left(\dfrac{\pi i}{\sqrt{k}}\right)z^k$; е) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{i^k}$; к) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{-z}$.

Задания для домашней работы

1 Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k\sin ik}{3^k}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{e^{2ik}}{k\sqrt{k}}$; ж) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\ln k}{\operatorname{sh} ik}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(1+i)^k}{2^{\frac{k}{2}}\cos ik}$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sh} ik}{k^2}$; и) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(1+i)^k}{2^{\frac{k}{2}}}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{5-i}{6}\right)^k$; е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\pi ik}{2^k}$; к) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-i)^k}{k}$.

2 Найти области сходимости и область равномерной сходимости функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{k}}z^k$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{z}{ik}\right)^k$; ж) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{z}{\ln ik}\right)^k$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi i}{k}z^k$; д) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}i^k z^k$; и) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\cos ik\cdot z^k$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{z^k}{\sin^k(1+ik)}$; е) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{z+k}$; к) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k(z+2)^k}$.

Практическое занятие 6 **Ряды Тейлора и Лорана**

6.1 Ряд Тейлора
6.2 Ряд Лорана

6.1 Ряд Тейлора

Теорема 1 (Тейлора) Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в круге $|z-z_0|<R$, единственным образом разлагается в этом круге в ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k,$$

где $c_0=f(z_0)$, $c_k=\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, $k=0,1,2,\ldots$.

Коэффициенты c_k, учитывая интеграл типа Коши (практическое занятие 5), можно вычислять по формулам

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\rho}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}},\ k=1,2,\ldots,$$

где c_ρ – произвольная окружность с центром в точке z_0.

Говорят, что функция $f(z)$ *голоморфна в точке* z_0, если она в некоторой окрестности этой точки раскладывается в ряд по степеням ($z-z_0$). Функция, голоморфная в каждой точке области D, называется *голоморфной в этой области*.

Особой точкой функции $f(z)$ называется точка, в которой функция не является аналитической.

При $z_0=0$ имеет место ряд Маклорена:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot z^k.$$

Разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций комплексной переменной аналогичны разложениям в ряд Тейлора функций действительной переменной:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots\frac{z^n}{n!}+\ldots,\ z\in\mathbb{C},$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \ z \in \mathbb{C},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \ z \in \mathbb{C},$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \ldots, \ |z| < 1,$$

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1!} z + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \ldots, \ |z| < 1.$$

Ряд Тейлора для многозначной функции получается из разложения соответствующей однозначной функции путем прибавления к нему чисел $2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$.

6.2 Ряд Лорана

Ряд вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

называется *рядом Лорана.* Здесь $k \in \mathbb{Z}$, z_0 – фиксированная точка комплексной плоскости; z – переменная точка; $c_k \in \mathbb{C}$ – *коэффициенты* ряда.

Ряд Лорана представляет собой сумму двух рядов

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z - z_0)^{-k}$ называется *главной частью*, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ – *правильной частью* ряда Лорана.

Заменой переменной $\xi = \dfrac{1}{z - z_0}$ главная часть ряда Лорана преобразуется в степенной ряд, который сходится к аналитической функции $\varphi(\xi)$ в круге $|\xi| < \rho$. Возвращаясь к переменной z, имеем, что главная часть сходится к функции

$f_1(z) = \varphi\left(\dfrac{1}{z - z_0}\right)$ в области $|z - z_0| > \dfrac{1}{\rho}$. Область сходимости представляет собой внешность круга радиуса $R_1 = \dfrac{1}{\rho}$ с центром в точке z_0.

Правильная часть ряда Лорана представляет собой степенной ряд, поэтому его областью сходимости является круг радиуса R_2 с центром в точке z_0. Внутри этого круга ряд сходится к некоторой аналитической функции $f_2(z)$.

Если $R_1 < R_2$, то существует общая область сходимости рядов, составляющих ряд Лорана. Внутри кольца $R_1 < |z - z_0| < R_2$ ряд Лорана сходится к некоторой аналитической функции $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$. Если $R_1 > R_2$, то ряд Лорана расходится.

Областью сходимости ряда Лорана называется общая часть сходимости его главной и правильной частей.

Теорема 2 Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$, однозначно представляется в этом кольце рядом Лорана $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, где коэффициенты c_k вычисляются по формуле

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

Γ – любой замкнутый контур в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$, содержащий точку z_0 внутри.

Рядом Лорана для аналитической функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ называется ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

сходящийся в кольце $R < |z| < \infty$.

При преобразовании $z = \frac{1}{w}$ точка $z = \infty$ отображается в точку $w = 0$ и окрестность бесконечно удаленной точки – в окрестность точки $w = 0$. В окрестности точки $w = 0$ функция $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ является аналитической и ее разложение в ряд Лорана есть $g(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k' w^k$. Возвращаясь к прежней переменной $z = \frac{1}{w}$, получаем ряд Лорана для функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$:

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k ,$$

где $c_k = c_{-k}'$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте теорему Тейлора.

2 Как определяется ряд Тейлора для многозначных функций?

3 Какой ряд называется рядом Лорана?

4 Что называется областью сходимости ряда Лорана?

5 Какой ряд называется рядом Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки?

Решение типовых примеров

1 Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z - 3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ и найти область сходимости ряда.

Решение. Найдем нули знаменателя:

$$z^2 + 2z - 3 = 0; \; z_1 = -3; \; z_2 = 1.$$

Тогда $z^2 + 2z - 3 = (z-1)(z+3)$.

Функцию $f(z)$ можно записать в виде:

$$f(z)=\frac{z}{z^2+2z-3}=\frac{z}{(z-1)(z+3)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z+3}=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-z}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3+z}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-z}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)}.$$

Используя разложение

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\ ,\ |z|<1,$$

получим:

$$f(z)=-\frac{1}{4}\left(1+z+\ldots+z^n+\ldots\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{z}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{z^n}{3^n}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^n}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^n}-1\right)z^n\ .$$

Область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ есть $|z|<1$, а область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^n}$ есть $|z|<3$. Поэтому областью сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{3^n}-1\right)z^n$ является круг $|z|<1$.

2 Разложить по степеням $(z+1)$ функцию $f(z)=e^{2z+1}$.

Р е ш е н и е. Преобразуем функцию $f(z)$:

$$f(z)=e^{2(z+1)-1}=e^{2(z+1)}\cdot e^{-1}.$$

Используя основное разложение функции e^z в ряд Маклорена, получим:

$$f(z)=e^{-1}\left(1+2(z+1)+\frac{2^2(z+1)^2}{2!}+\ldots+\frac{2^n(z+1)^2}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}(z+1)^n\ .$$

Область сходимости данного ряда $|z| < \infty$.

3 Найти несколько первых членов разложения в ряд по степеням z функции $f(z) = \operatorname{tg} z$.

Решение. Найдем производные функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ в точке $z = 0$:

$$f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z} \text{ или } f'(z) = 1 + f^2(z),$$

$$f''(z) = 2f(z)f'(z),$$

$$f'''(z) = 2\left(f'^2(z) + f(z)f''(z)\right),$$

$$f^{(4)}(z) = 2\left(3f'(z)f''(z) + f(z)f'''(z)\right),$$

$$f^{(5)}(z) = 2\left(3f''^2(z) + 4f'(z)f'''(z) + f(z)f^{(4)}(z)\right).$$

Отсюда

$$f'(0) = 1; \; f''(0) = 0; \; f'''(0) = 2; \; f^{(4)}(0) = 0; \; f^{(5)}(0) = 16, \; \ldots.$$

Подставляя найденные значения производных в ряд Тейлора, получим:

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{2}{3!}z^3 + \frac{16}{5!}z^5 + \ldots.$$

4 Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ в круге $|z| < 1$.

Решение. Преобразуем функцию $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Так как

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{2^n} + \cdots\right), \; |z| < 2,$$

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z-1} = -\left(1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots\right), \; |z| < 1,$$

то ряд Лорана есть

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)+\left(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots+\frac{2^{n-1}-1}{2^{n+1}}z^n+\cdots.$$

Полученный ряд сходится в круге $|z|<1$.

5 Разложить функцию $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}$ в ряд Лорана в окрестности особой точки $z_0=0$

Решение. Используя основное разложение функции $\sin z$ в ряд Маклорена, получим

$$f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}=z^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots\right)=$$

$$=z-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^3}-\frac{1}{7!z^5}+\ldots.$$

Функция является аналитической в кольце $0<|z|<\infty$.

6 Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$$

а) в круге $|z|<1$;

б) в кольце $1<|z|<2$;

в) в области $2<|z|<\infty$.

Решение. Функция $f(z)$ имеет две особые точки $z_1=-2$, $z_2=1$. Представим функцию в виде

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}$$

а) разложение в круге $|z|<1$:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2+z}-\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-z}{2}\right)}-\frac{1}{1-z}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\ldots\right)-\left(1+z+z^2+z^3+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right)z^n .$$

Ряд для первой функции сходится при условии $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, т. е. в области $|z|<2$, для второй – в области $|z|<1$, поэтому ряд для функции $f(z)$ сходится в круге $|z|<1$;

б) разложение в кольце $1<|z|<2$:

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\ldots\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} .$$

Ряд для первой функции сходится, если $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, т. е. при $|z|<2$, для второй функции, если $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, т. е. если $|z|>1$, а ряд для функции $f(z)$ сходится в кольце $1<|z|<2$;

в) разложение для $|z|>2$:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-2}{z}\right)}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}-\frac{2^3}{z^3}+\ldots\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n 2^n+1\right)\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Ряд для первой функции сходится в области $\left|\frac{2}{z}\right|<1$, т. е. при $|z|>2$, для второй, если $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, т. е. если $|z|>1$, поэтому ряд для функции $f(z)$ сходится в области $|z|>2$.

7 Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности ее особых точек $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$.

Решение. Преобразуем функцию:

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}.$$

Разложение в окрестности точки $z_1=0$ по степеням z до ближайшей особой точки $z_2=1$ (в кольце $0<|z|<1$) есть:

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\ldots=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n.$$

Разложение в окрестности точки $z_2=1$ по степеням $(z-1)$, справедливо в кольце $0<|z-1|<1$:

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)+1}=$$

$$=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{1-(-(z-1))}=$$

$$=-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\ldots=$$

$$=-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

Задания для аудиторной работы

1 Разложить в окрестности указанных точек в ряд Тейлора и найти его области сходимости функции:

а) $f(z)=\sin(2z+1)$; $z_0=-1$;

б) $f(z)=e^z$ по степеням $2z-1$;

в) $f(z)=\ln(2-z)$; $z_0=0$;

г) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+4z-5}$; $z_0=0$;

д) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+i}$; $z_0=0$;

е) $f(z)=\dfrac{z-1}{2+z-z^2}$; $z_0=0$;

ж) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4z-5}$; $z_0=0$;

и) $f(z)=\cos z$; $z_0=-\dfrac{\pi}{4}$;

к) $f(z)=\dfrac{1}{3z+1}$; $z_0=-2$;

л) $f(z)=\cos^2\dfrac{iz}{2}$; $z_0=0$;

м) $f(z)=\mathrm{sh}^2\dfrac{z}{2}$; $z_0=0$;

н) $f(z)=\dfrac{2}{z-1}$; $z_0=i$;

о) $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2+2z-3}$; $z_0=0$;

п) $f(z)=e^{z+3}$; $z_0=2$.

2 Разложить в ряд Лорана в окрестности особых точек функции:

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$;

б) $f(z)=z^4\cos\dfrac{1}{z}$;

в) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-2}$;

г) $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$;

д) $f(z)=\dfrac{z^5}{(z^2-4)^2}$;

е) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$;

и) $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$;

к) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$;

л) $f(z)=ze^{\frac{1}{z+i}}$;

м) $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$;

н) $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$;

о) $f(z)=\dfrac{2z}{(z+1)(z-2)}$;

ж) $f(z)=\dfrac{e^{z}-1}{z}$; п) $f(z)=\dfrac{z-2}{(z+1)z}$.

3 Разложить функции в ряд Лорана:

а) $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(1+z^{2})}$ в области $1<|z|<4$;

б) $f(z)=\dfrac{z}{(z^{2}-4)(z^{2}-1)}$ в области $1<|z|<2$;

в) $f(z)=\dfrac{z^{3}}{z^{2}-2z+1}$ в окрестности точек $z_1=0$ и $z_2=1$;

г) $f(z)=\dfrac{z}{(z^{2}-4)(z^{2}-1)}$ в окрестности точек $z_1=1$ и $z_2=-2$;

д) $f(z)=\dfrac{1}{(z^{2}+9)z}$ в окрестности точек $z_1=0$ и $z_2=3i$.

Задания для домашней работы

1 Разложить в окрестности указанных точек в ряд Тейлора и найти его области сходимости функции:

а) $f(z)=\dfrac{z}{z+2}$; $z_0=0$;

б) $f(z)=\dfrac{1}{z+1}$; $z_0=i$;

в) $f(z)=\dfrac{1}{z^{2}+4}$; $z_0=0$;

г) $f(z)=e^{z}$; $z_0=-1$;

д) $f(z)=\dfrac{z}{z-2}$; $z_0=1$;

е) $f(z)=\dfrac{z}{z-3}$; $z_0=-1$;

ж) $f(z)=\ln z$; $z_0=1$;

и) $f(z)=\sin z$; $z_0=\dfrac{\pi}{4}$;

к) $f(z)=\dfrac{z}{z^{2}-2z-3}$; $z_0=0$;

л) $f(z)=\dfrac{z}{3-2z}$; $z_0=3$;

м) $f(z)=e^{2z}$; $z_0=-i$;

н) $f(z)=\dfrac{1}{z-3}$; $z_0=-1$;

о) $f(z)=\dfrac{z}{z^{2}+9}$; $z_0=0$;

п) $f(z)=\dfrac{z}{z^{2}-4z-5}$; $z_0=0$.

2 Разложить в ряд Лорана в окрестности особых точек функции:

а) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z^4}$;

б) $f(z)=\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z}$;

в) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^2}$;

г) $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)(z-1)}$;

д) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z-3}$,

е) $f(z)=\dfrac{1+\cos z}{x^4}$;

ж) $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}$;

и) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3}$;

к) $f(z)=z^3 e^{\frac{1}{z}}$;

л) $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z+3)}$;

м) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+4}$;

н) $f(z)=\dfrac{z^2}{z^2+5z+4}$;

о) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-3z+2}$;

п) $f(z)=\dfrac{z-2}{(z+1)(z+4)}$.

3 Разложить функции в ряд Лорана:

а) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$ в областях $0<|z|<1$ и $1<|z|<\infty$;

б) $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$ в области $1<|z|<2$;

в) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}$ в окрестности точки $z_1=1$;

г) $f(z)=\dfrac{1}{z(z-3)^2}$ в окрестности точек $z_1=0$ и $z_2=3$;

д) $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$ в окрестности точек $z_1=2$ и $z_2=-1$.

Практическое занятие 7 **Классификация изолированных особых точек аналитической функции**

7.1 Нули аналитической функции
7.2 Изолированные особые точки аналитической функции

7.3 Нули аналитической функции

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0. Точка z_0 называется *нулем* функции $f(z)$ порядка m, если выполняются условия

$$f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0,\ \ldots,\ f^{(m-1)}(z_0)=0,\ f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

При $m=1$ точка z_0 называется *простым* нулем.

Теорема 1 Точка z_0 является нулем порядка m функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности точки z_0 имеет место равенство

$$f(z)=(z-z_0)^m\cdot\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z)\neq 0$.

7.2 Изолированные особые точки

Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки $z=z_0$.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется:

– *устранимой особой* точкой, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a,\ a\neq\infty$;

– *полюсом*, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$;

– *существенно особой*, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Точка z_0 является *полюсом порядка* m, если для функции

$g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ точка z_0 является нулем порядка m. Полюс порядка $m=1$ называется *простым полюсом*.

Т е о р е м а 2 Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка m функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m},$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Аналитическая функция $f(z)$ называется *мероморфной* в области $\bar{D}\subset\mathbb{C}$, если $f(z)$ не имеет в ней других особых точек, кроме полюсов.

Пусть аналитическая функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 разлагается в ряд Лорана:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k+\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-z_0)^{-k},\ c_k\in\mathbb{C}.$$

Т е о р е м а 3 Для того чтобы точка z_0 была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана функции $f(z)$ не содержал членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$ (ряд Лорана не содержит главной части).

Т е о р е м а 4 Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана функции $f(z)$ содержал конечное число членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$ (в главной части ряда содержится конечное число членов).

Т е о р е м а 5 Для того чтобы точка z_0 была существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана содержал бесконечно много членов с отрица-

тельными степенями разности $\left(z-z_0\right)$ *(в главной части ряда содержится бесконечно много членов с отрицательными показателями).*

Исследование характера бесконечно удаленной особой точки $z=\infty$ удобнее проводить путем замены $z=\frac{1}{w}$, при которой точка $z=\infty$ переходит в точку $w=0$. Тогда:

– если в разложении в ряд Лорана функции $f\left(z\right)$ нет членов с положительными степенями z, то бесконечно удаленная точка называется устранимой особой точкой функции $f\left(z\right)$;

– если в разложении в ряд Лорана функции $f\left(z\right)$ есть лишь конечное число членов с положительными степенями z, то бесконечно удаленная точка называется полюсом функции $f\left(z\right)$;

– если в разложении в ряд Лорана функции $f\left(z\right)$ есть бесконечно много членов с положительными степенями z, то бесконечно удаленная точка называется существенно особой точкой функции $f\left(z\right)$.

Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ в бесконечно удаленной точке имеют существенную особенность, так как их разложения в ряд Лорана содержат бесконечное множество положительных степеней z.

Вопросы для самоконтроля

1 Какая точка называется нулем функции? Что называется кратностью нуля?

2 Как представима функция, имеющая нуль кратности m?

3 Какая точка называется изолированной особой точкой?

4 Какая изолированная особая точка называется: а) устранимой, б) полюсом, в) существенно особой?

5 Как влияет характер изолированной особой точки на вид ряда Лорана?

6 Как определяется особенность в бесконечно удаленной точке?

Решение типовых примеров

1 Найти нули и определить их порядок функции

$$f(z)=1+\cos z .$$

Решение. Приравнивая $f(z)$ к нулю, получим $\cos z=-1$. Отсюда точки $z_n=(2n+1)\pi$, $n\in\mathbb{Z}$, есть нули данной функции.

Далее

$$f'(z)=-\sin z,\ f'((2n+1)\pi)=-\sin(2n+1)\pi=0,$$

$$f''(z)=-\cos z,\ f''((2n+1)\pi)=-\cos(2n+1)\pi=1\neq 0.$$

Следовательно, точки $z_n=(2n+1)\pi$, $n\in\mathbb{Z}$, являются нулями 2-го порядка данной функции.

2 Найти порядок нуля $z_0=0$ функции $f(z)=\dfrac{z^8}{z-\sin z}$.

Решение. Используя разложение функции $\sin z$ в окрестности точки $z_0=0$, получим:

$$f(z)=\frac{z^8}{z-\sin z}=\frac{z^8}{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots\right)}=\frac{z^8}{-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots}=$$

$$=\frac{z^5}{-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}+\ldots}=z^5\cdot\frac{1}{-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}+\ldots}.$$

Положим $\varphi(z)=\dfrac{1}{-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}+\ldots}$.

Тогда $f(z)=z^5\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – функция аналитическая в точке $z_0=0$, причем $\varphi(0)=6\neq 0$.

Согласно теореме 1, точка $z_0=0$ является для данной функции нулем 5-го порядка.

3 Какую особенность в точке $z_0=0$ имеет функция

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}\ ?$$

Р е ш е н и е . 1 способ Точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой, так как предел в этой точке равен

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1.$$

2 способ В окрестности точки $z_0 = 0$ разложение в ряд Лорана имеет вид:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{z - \dfrac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots}{z} =$$

$$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!} + \cdots .$$

Видно, что ряд Лорана в точке $z_0 = 0$ не содержит членов с отрицательными степенями, т. е. не содержит главной части. Согласно теореме 3 точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой для функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

4 Какую особенность в точке $z_0 = 0$ имеет функция

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}\ ?$$

Р е ш е н и е . 1 способ Имеем:

– если $z \to 0$ вдоль положительной части действительной оси, то $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$;

– если $z \to 0$ вдоль отрицательной части действительной оси, то $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim\limits_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

Следовательно, данная функция не имеет предела в точке $z_0 = 0$.

2 способ Разложение в ряд Лорана функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $z_0 = 0$ имеет вид:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\cdot z^2} + \cdots + \frac{1}{n!\cdot z^n} + \cdots .$$

Видно, что главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов. Согласно теореме 5 точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой.

5 Определить какую особенность в бесконечно удаленной точке имеет функция $f(z) = \dfrac{1}{z-4}$.

Решение. Произведем замену переменной z на переменную w по формуле $z = \dfrac{1}{w}$. Тогда данная функция принимает следующий вид $f\left(\dfrac{1}{w}\right) = \dfrac{w}{1-4w}$. При условии $|4w| < 1$ имеет место разложение:

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = w\left(1 + 4w + (4w)^2 + \cdots\right).$$

Возвращаясь к переменной z, имеем:

$$f(z) = \frac{1}{z-4} = \frac{1}{z}\cdot\left(1 + \frac{4}{z} + \frac{4^2}{z^2} + \cdots\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{z^{k+1}},\ |z| < 4.$$

Видно, что ряд Лорана не содержит правильную часть. Следовательно, точка $z = \infty$ является устранимо особой точкой.

6 Найти особые точки и определить их характер для функции

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

Решение. Особая точка функции $f(z)$ есть $z_0 = 0$.

1 способ. Вычислим предел

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{1} = 1 \neq 0$$

Значит, $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой функции.

2 способ. Разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ имеет вид:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{\left(1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \ldots\right) - 1}{z} =$$

$$= \frac{z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots}{z} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots .$$

Ряд Лорана не содержит главной части, значит по теореме 3 точка $z_0 = 0$ есть устранимая особая точка данной функции.

7 Найти особые точки и определить их характер для функции

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3 + z^2 + z - 1} .$$

Решение. Найдем особые точки функции из условия:

$$z^3 + z^2 + z - 1 = 0 .$$

Решая уравнение, получим две особые точки $z_1 = -1$; $z_2 = 1$.

Найдем предел в точке $z_1 = -1$:

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sin z}{z^3 + z^2 + z - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{\sin z}{(z+1)^2 (z-1)} = \infty$$

Согласно определению, точка $z_1 = -1$ – полюс. Чтобы определить его порядок, представим функцию $f(z)$ в виде:

$$f(z) = \frac{\frac{\sin z}{z-1}}{(z+1)^2} = \frac{\varphi(z)}{(z+1)^2} ,$$

где $\varphi(z) = \dfrac{\sin z}{z-1}$ – аналитична в точке $z_1 = -1$ и $\varphi(-1) = \dfrac{\sin 1}{2} \neq 0$.

Отсюда по теореме 2 точка $z_1 = -1$ – полюс 2-го порядка функции $f(z)$.

Аналогично точка $z_2 = 1$ – полюс, поскольку

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin z}{z^3 + z^2 + z - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sin z}{(z+1)^2 (z-1)} = \infty .$$

Так как

$$f(z) = \frac{\frac{\sin z}{(z+1)^2}}{z-1} = \frac{\varphi_1(z)}{z-1} ,$$

где $\varphi_1(z)$ – аналитична в точке $z_2 = 1$ и $\varphi(1) = \dfrac{\sin 1}{4} \neq 0$, то точка $z_2 = 1$ – простой полюс функции $f(z)$

8 Найти особые точки и определить их характер для функции

$$f(z) = \frac{1}{z^3}$$

Решение. Особая точка функции $z_0 = 0$. Так как

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z^3} = \infty,$$

то точка $z_0 = 0$ – полюс.

Для функции $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)} = z^3$ точка $z_0 = 0$ – нуль третьего порядка, значит, для функции $f(z)$ – полюс 3-го порядка.

9 Определить характер особой точки $z = 0$ для функции

$$f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}.$$

Решение. <u>*1 способ*</u> Рассмотрим поведение функции на действительной и мнимой осях.

Пусть $z = x$ и $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \to \infty$ при $x \to 0$.

Пусть $z = iy$ и $f(iy) = e^{-\frac{1}{y^2}} \to 0$ при $y \to 0$.

Отсюда следует, что функция $f(z)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела в точке $z_0 = 0$ и $z_0 = 0$ – существенно особая точка функции $f(z)$

<u>*2 способ*</u> Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$, т. е. в области $0 < |z| < \infty$:

$$e^{\frac{1}{z^2}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^6} + \ldots$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых, поэтому точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой функции $f(z)$.

Задания для аудиторной работы

1 Найти нули и определить их порядок для функций:

а) $f(z) = z^4 + 4z$; в) $f(z) = \cos z + \operatorname{ch} iz$;

б) $f(z) = z^2 \sin z$; г) $f(z) = (z + \pi i)\operatorname{sh} z$.

2 Найти порядок нуля $z_0 = 0$ для функций:

а) $f(z) = 4\sin z^3 + z^2\left(z^2 - 2\right)$; в) $f(z) = \dfrac{z^4}{z - \sin z}$;

б) $f(z) = 2(\operatorname{ch} z - 1) - z^2$; г) $f(z) = z^2\left(e^{\ ^{2}} - 1\right)$.

3 Определить характер особой точки $z_0 = 0$ для функций:

а) $f(z) = \dfrac{1}{z - \sin z}$; в) $f(z) = \dfrac{1}{e^{-z} + z - 1}$;

б) $f(z) = \dfrac{1}{2 + z^2 - \operatorname{ch} z}$; г) $f(z) = \dfrac{\sin z}{e^{-z} + z - 1}$.

4 Найти особые точки и определить их характер для функций:

а) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$; д) $f(z) = \cos\dfrac{1}{z}$;

б) $f(z) = \sin\dfrac{\pi}{z + 1}$; е) $f(z) = \dfrac{1 - e^{-z}}{z}$;

в) $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$; ж) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2 - 2z + 1}$;

г) $f(z) = \sin\dfrac{1}{z^2}$; и) $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 + 2z + 1}$.

5 Определить характер указанных особых точек для функций:

а) $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}$, $z_0 = -1$; б) $f(z) = \cos\dfrac{1}{z + \pi}$, $z_0 = -\pi$.

Задания для домашней работы

1 Найти нули и определить их порядок для функций:

а) $f(z)=1+\operatorname{ch} z$; в) $f(z)=\sin z+\operatorname{sh} iz$;

б) $f(z)=\cos z-1$; г) $f(z)=\dfrac{z^3}{1+z-e^z}$.

2 Найти порядок нуля $z_0=0$ для функций:

а) $f(z)=\dfrac{z^3}{1+z-e^z}$; б) $f(z)=e^{\sin z}-e^{\operatorname{tg} z}$.

3 Определить характер особой точки $z_0=0$ для функций:

а) $f(z)=\dfrac{1}{\cos z-1+\dfrac{z^2}{2}}$; г) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z-z+\dfrac{z^3}{6}}$;

б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh} z}{z-\operatorname{sh} z}$; д) $f(z)=\dfrac{\ln\left(1+z^3\right)}{z^2}$;

в) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}+\sin\dfrac{2-\pi z}{2z}$; е) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$.

4 Найти особые точки и определить их характер для функций:

а) $f(z)=\dfrac{1}{1-\sin z}$; д) $f(z)=e^{\frac{1}{z+2}}$;

б) $f(z)=\dfrac{z}{z^5+2z^4+z^3}$; е) $f(z)=\dfrac{z^2}{\cos z-1}$;

в) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z+1}$; ж) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-1}$;

г) $f(z)=e^{\frac{1}{z-3}}$; и) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^2(z-2)}$.

5 Определить характер указанных особых точек для функций:

а) $f(z)=(z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$; $z_0=1$;

б) $f(z)=\dfrac{e^{z+e}}{z+e}$, $z_0=-e$.

Практическое занятие 8 **Вычеты**

8.1 Определение вычета
8.2 Вычисление вычетов
8.3 Логарифмический вычет

8.1 Определение вычета

Пусть z_0 изолированная особая точка функции $f(z)$. *Вычетом* аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+} f(z)dz$, взятому в положительном направлении по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру Γ, лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащему внутри себя единственную особую точку z_0 функции $f(z)$, и обозначается $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+} f(z)dz .$$

Вычет функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки z_0 совпадает с коэффициентом c_{-1} разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$: $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$.

8.2 Вычисление вычетов

Вычет $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ можно найти либо непосредственно по определению

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+} f(z)dz , \tag{8.1}$$

либо используя разложение в ряд Лорана:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} . \tag{8.2}$$

Рассмотрим вычисление вычетов в различных особых точках.

Вычисление вычетов функции относительно устранимой особой точки. Пусть z_0 есть устранимая особая точка функции $f(z)$. В этом случае в разложении в ряд Лорана отсутствует главная часть. Поэтому $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

Вычисление вычетов функции относительно полюса. Пусть точка z_0 является <u>*простым полюсом*</u> функции $f(z)$. Тогда вычет находится по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)\cdot f(z)\right]. \tag{8.3}$$

Если функция $f(z)$ есть частное двух аналитических в точке z_0 функций $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, где $g(z_0) \neq 0$, $h(z)$ имеет простой нуль в точке z_0, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$, то точка z_0 является простым полюсом функции $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ и

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{h(z)} == \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \tag{8.4}$$

Пусть точка z_0 является <u>*полюсом порядка*</u> m функции $f(z)$. Тогда вычет находится по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\cdot \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}\left[(z-z_0)^m \cdot f(z)\right]}{dz^{m-1}}. \tag{8.5}$$

Вычисление вычетов функции относительно существенно особой точки. Пусть точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$. Тогда для вычисления вычета функции $f(z)$ в этой точке непосредственно определяют коэффициент c_{-1} в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана.

Вычет функции $f(z)$ относительно *бесконечно удаленной точки* $z=\infty$ находится с помощью разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой точки. Поэтому вычет функции $f(z)$ относительно $z=\infty$ равен взятому с противоположным знаком коэффициенту при первой отрицательной степени в разложении Лорана:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}. \tag{8.6}$$

Вычет аналитической функции относительно бесконечно удаленной устранимой особой точки может оказаться отличным от нуля.

Теорема 1 Если $f(z)$ – функция, аналитическая в каждой точке расширенной плоскости □ , за исключением конечного числа изолированных особых точек, то

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0. \tag{8.7}$$

8.3 Логарифмический вычет

Логарифмической производной функции $f(z)$ называется функция

$$\left(\ln f(z)\right)'=\frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{8.8}$$

Логарифмическим вычетом аналитической функции $f(z)$ в точке z_0 называется вычет в этой точке логарифмической производной $\left(\ln f(z)\right)'$: $\operatorname*{Res}_{z=z_0}\left(\ln f(z)\right)'$.

Очевидно, что

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\left(\ln f(z)\right)'=\operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{8.9}$$

Теорема 2 В нулях и полюсах функции $f(z)$, аналитической в области D, логарифмическая производная $\left(\ln f(z)\right)'$ имеет полюсы первого порядка. При этом в нуле функции $f(z)$

логарифмический вычет равен порядку нуля функции $f(z)$, *а в полюсе равен порядку полюса функции* $f(z)$, *взятому со знаком минус*.

Пусть $f(z)$ – мероморфная функция в области D, Γ – замкнутый кусочно-гладкий контур, целиком лежащий в области D и не проходящий через полюсы и нули функции $f(z)$. *Логарифмическим вычетом* относительно *контура* Γ называется интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz .$$

Т е о р е м а 3 Если N_Γ *– сумма кратностей нулей функции* $f(z)$, *лежащих внутри* Γ, P_Γ *– сумма кратностей полюсов функции* $f(z)$, *лежащих внутри* Γ, *то*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_\Gamma - P_\Gamma . \qquad (8.10)$$

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется вычетом функции?

2 Как вычисляется вычет относительно:

а) устранимой точки;

б) простого полюса;

в) полюса порядка m;

г) существенно особой точки;

д) бесконечно удаленной точки?

3 Что называется логарифмическим вычетом?

4 Как для мероморфной функции вычисляется логарифмический вычет по контуру?

Решение типовых примеров

1 Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{z-4}{z^3-z}$.

Решение. Изолированными особыми точками данной функции являются $z_1 = 0$ – полюс 2-го порядка и $z_2 = 1$ – простой полюс.

Для точки $z_2 = 1$ по формуле (8.4) имеем:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{z-4}{z^3-z} = \left.\frac{z-4}{\left(z^3-z\right)'}\right|_{z=1} = \left.\frac{z-4}{3z^2-1}\right|_{z=1} = \frac{1-4}{3\cdot 1-1} = -\frac{3}{2}.$$

Для точки $z_1 = 0$ по формуле (8.5) имеем:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z-4}{z^3-z} = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2\cdot(z-4)}{z^3-z}\right)'' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z-4}{z-1}\right)'' =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{3}{(z-1)^2}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{-6}{(z-1)^3} = 6.$$

Вычет в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ находится по теореме 1:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\left(-\frac{3}{2}+6\right) = 4{,}5.$$

2 Вычислить вычет функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ в точке $z_0 = 0$.

Решение. Точка $z = 0$ является для функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ существенно особой точкой. Разложим данную функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\cdot z^2} + \cdots + \frac{1}{n!\cdot z^n} + \cdots.$$

Отсюда находим $\operatorname*{Res}_{z=0} e^{\frac{1}{z}} = c_{-1} = 1$.

3 Найти сумму вычетов относительно всех полюсов функции

$$f(z) = \frac{z^6}{\left(z^2+4\right)^2\left(z^2+1\right)^3}$$

Решение. Полюсами данной функции являются точки: $z_{1,2} = \pm 2i$ – полюса 2-го порядка, $z_{3,4} = \pm i$ – полюса 3-го порядка.

Для решения этого примера удобнее воспользоваться теоремой 1. Видно, что в бесконечно удаленной точке функция $f(z)$ имеет нуль первого порядка. Правильная часть ее разложения в ряд Лорана начинается с члена $\frac{1}{z}$.

Следовательно,

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{z^6}{\left(z^2+4\right)^2\left(z^2+1\right)^3} = -1 .$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{4} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{z^6}{\left(z^2+4\right)^2\left(z^2+1\right)^3} = 1 .$$

4 Найти вычеты в особых точках функции

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}$$

Решение. Изолированные особые точки функции $f(z)$ есть $z_1 = 0$; $z_2 = \frac{\pi}{4}$.

Поскольку

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z^2}{z^2} \lim_{z\to 0} \frac{1}{z - \frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi} ,$$

то точка $z = 0$ – устранимая особая точка и поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0 .$$

Так как

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2} = \infty,$$

то точка $z = \frac{\pi}{4}$ – полюс.

Преобразуем функцию $f(z)$ к виду:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2\left(z - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sin z^2}{z^2}}{z - \frac{\pi}{4}} = \frac{\varphi(z)}{z - \frac{\pi}{4}},$$

где $\varphi(z) = \frac{\sin z^2}{z^2}$ – аналитическая в точке $z = \frac{\pi}{4}$, при этом $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq 0$. Значит, $z = \frac{\pi}{4}$ – простой полюс.

Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{4}} f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} f(z)\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin z^2}{z^2} = \frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}.$$

Вычет в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ находится по теореме 1:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\left(0 + \frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}\right) = -\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}.$$

5 Найти вычеты в особых точках функции $f(z) = \dfrac{\cos\frac{1}{z}}{z+3}$.

Решение. Изолированные особые точки функции есть $z = -3$ и $z = 0$.

Точка $z = -3$ – простой полюс, по формуле (8.3) получим:

$$\operatorname*{Res}_{z=-3} f(z) = \lim_{z\to-3}\left(\frac{\cos\frac{1}{z}}{z+3}\right)(z+3) = \lim_{z\to-3}\cos\frac{1}{z} = \cos\frac{1}{3}.$$

Точка $z = 0$ – существенно особая точка функции. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$. Поскольку

$$\cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4!\,z^4} - \frac{1}{6!\,z^6} + \ldots,$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} - \frac{z^3}{3^3} + \ldots\right),$$

то

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4!\,z^4} - \frac{1}{6!\,z^6} + \ldots\right)\left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} - \frac{z^3}{3^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{3z}\left(\frac{1}{2!\cdot 3} - \frac{1}{4!\cdot 3^3} + \frac{1}{6!\cdot 3^5} - \ldots\right) + \frac{1}{z^2}c_{-2} + \ldots + .$$

Таким образом по формуле (8.2) находим

$$c_{-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\cdot 2!} - \frac{1}{3^3\cdot 4!} + \frac{1}{3^5\cdot 6!} - \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!\cdot 3^{2n}}.$$

Значит,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!\cdot 3^{2n}}.$$

6 Найти вычеты функции в особых точках

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2}.$$

Р е ш е н и е . Особая точка функции $z = 1$ есть полюс 2-го порядка. По формуле (8.5) находим

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z-1)^2}(z-1)^2\right) = \lim_{z\to 1}\left(z^2\right)' = \lim_{z\to 1} 2z = 2.$$

7 Найти логарифмические вычеты относительно нулей и полюсов функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{z+1}$.

Решение. Точки вида $z_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, являются простыми нулями функции. Поэтому по теореме 2 логарифмический вычет равен

$$\operatorname*{Res}_{z_k=\pi k}\left(\ln f(z)\right)' = 1.$$

Точка $z=-1$ есть простой полюс данной функции. По теореме 2 получим

$$\operatorname*{Res}_{z=-1}\left(\ln f(z)\right)' = -1.$$

8 Найти логарифмический вычет функции $f(z) = \dfrac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$ относительно окружности $|z| = \pi$.

Решение. В круге $|z| < \pi$ данная функция имеет два простых нуля $z = i$ и $z = -i$, а также семь полюсов 2-го порядка

$$z_k = k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3.$$

По теореме 3 логарифмический вычет относительно окружности $|z| = \pi$ равен

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=\pi}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2 - 7\cdot 2 = -12.$$

Задания для аудиторной работы

1 Найти в особых точках вычеты функций

а) $f(z) = z^3 \sin\dfrac{1}{z^2}$;

б) $f(z) = \dfrac{tgz}{z^2 - \dfrac{\pi}{4}z}$;

в) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$;

л) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}\cos z$;

м) $f(z) = \dfrac{chz}{(z^2+1)(z-3)}$;

н) $f(z) = z^3\cos\dfrac{1}{z}$;

г) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$; о) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}$;

д) $f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}$; п) $f(z)=e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$;

е) $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$; р) $f(z)=\cos z\sin\dfrac{1}{z}$;

ж) $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z+1}$; с) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$;

и) $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z+1)}$; т) $f(z)=\cos\dfrac{2}{z-\pi}$;

к) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z(z+1)^2}$; у) $f(z)=e^{\frac{2}{z}}$.

2 Вычислить:

а) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{e^z-1-z}{(1-\cos 2z)\sin z}$; б) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{(1-\operatorname{ch} z)\operatorname{sh} z}{(1-\cos z)\sin^2 z}$.

3 Найти логарифмические вычеты относительно нулей и полюсов функций

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$; б) $f(z)=\cos^3 z$.

4 Найти логарифмические вычеты функций относительно контуров:

а) $f(z)=\dfrac{z}{1+z^3}$. $|z|=2$; б) $f(z)=\operatorname{th} z$, $|z|=8$.

Задания для домашней работы

1 Найти вычеты функций:

а) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$; л) $f(z)=\dfrac{e^z}{\frac{1}{4}-\sin^2 z}$;

б) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$;

в) $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+i)\left(z-\dfrac{i}{2}\right)^2}$;

г) $f(z)=e^{\frac{z^2+1}{z}}$;

д) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$;

е) $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$;

ж) $f(z)=\sin z\cos\dfrac{1}{z}$;

и) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+2)(z-3)^2}$;

к) $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z-1)^2(z+1)}$;

м) $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$;

н) $f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{z-i}$;

о) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z^2}+z^3$;

п) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2}\sin\dfrac{1}{z-1}$;

р) $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}$;

с) $f(z)=e^z\sin\dfrac{1}{z}$;

т) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z+2}$;

у) $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}+z^3$.

2 Вычислить:

а) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{\sin 3z-3\sin z}{(\sin z-z)\sin z}$;

б) $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{z^2}{\operatorname{ch}z-1-\dfrac{z^2}{2}}$.

3 Найти логарифмические вычеты относительно нулей и полюсов функций:

а) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z}$;

б) $f(z)=\sin z$.

4 Найти логарифмические вычеты функций относительно контуров:

а) $f(z)=\cos z+\sin z$. $|z|=4$;

б) $f(z)=\left(e^z-2\right)^2$, $|z|=8$.

Практическое занятие 9 **Приложения вычетов**

9.1 Вычисление интегралов
9.2 Суммирование рядов

9.1 Вычисление интегралов

Вычисление интегралов по замкнутому контуру. Для вычисления интегралов комплексной переменной по замкнутому контуру используется основная теорема о вычетах.

Теорема 1 (основная теорема о вычетах) Если функция $f(z)$ *является аналитической на границе* Γ *области* D *и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, *то*

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k). \qquad (9.1)$$

Вычисление интегралов от рациональных функций. Пусть $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – рациональная функция, где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены степеней m и n соответственно. Если функция $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $n \geq m + 2$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sigma, \qquad (9.2)$$

где σ – сумма вычетов функции $f(z) = \dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ во всех полюсах, расположенных в верхней полуплоскости $\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0 \}$.

Интегралы вида $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$. Рассмотрим интеграл $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, ограниченная внутри промежутка интегрирования. С помощью замены

$$e^{ix} = z\,,\ dx = \frac{dz}{iz}\,,\ \cos x = \frac{z^2+1}{2z}\,,\ \sin x = \frac{z^2-1}{2i\,z}$$

данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции $F(z)$ комплексной переменной z по окружности $|z|=1$. К интегралу $\oint\limits_{|z|=1} F(z)dz$ применима основная теорема о вычетах. Тогда

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx = 2\pi\, i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} F(z). \tag{9.3}$$

Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Вычисление этих интегралов основано на следующей теореме.

Теорема 2 Пусть функция $f(x)$*, заданная на всей числовой оси* $-\infty < x < +\infty$*, может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} z \geq 0$*. Функция* $f(z)$ *является аналитической в верхней полуплоскости* $\{\ z \in \mathbb{C}\ |\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$ *за исключением конечного числа изолированных точек* $z_1, z_2, \ldots, z_n$*. И пусть существуют такие положительные числа* M *,* R_0 *,* δ *, что для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию* $|z| = R > R_0$*, имеет место оценка* $|f(z)| < \dfrac{M}{|z|^{1+\delta}}$*. Тогда несобственный интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *существует и вычисляется по формуле:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi\, i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)\,,\ \operatorname{Im} z_k > 0\,. \tag{9.4}$$

И н т е г р а л ы   в и д а $\int_0^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx$, $\int_0^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx$. Ин-

тегралы вида $\int_0^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx$, $\int_0^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx$, где $R(x)$ – рациональная функция, $\lambda > 0$ любое действительное число вычисляются с использованием леммы Жордана.

Л е м м а   Ж о р д а н а Пусть $g(z)$ – аналитическая в верхней полуплоскости $\{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0 \,\}$, за исключением конечного числа особых точек, и стремится в этой полуплоскости к нулю при $|z| \to \infty$. Тогда при $\lambda > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0,$$

где контур C_R – полуокружность в верхней полуплоскости с центром в точке 0 и радиусом R (рисунок 9. 1).

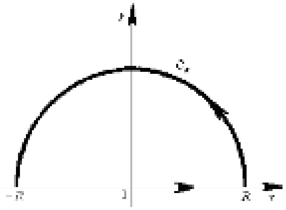

Рисунок 9. 1 – Рисунок к лемме Жордана

9.2 Суммирование рядов

Вычисление некоторых рядов с помощью теории вычетов основано на следующих теоремах.

Т е о р е м а 3 Пусть:

1) $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа полюсов z_1, z_2, …, z_n (отличных от целых чисел), *2) функция* $f(z)$ *удовлетворяет условию* $f(z)=O\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$ *при* $z\to\infty$. *Тогда справедлива формула:*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)=-\pi\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z)\operatorname{ctg}(\pi z)\right]. \tag{9.5}$$

Теорема 4 Пусть:

1) $f(z)$ *аналитична во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа полюсов* z_1, z_2, ..., z_n *(отличных от целых чисел),*

2) функция $f(z)$ *удовлетворяет условию*

$f(z)\le \mathrm{e}^{a|\mathrm{Im}\,z|}\,\varepsilon(|z|)$ *при* $z\to\infty$, $z\in G_\rho$, $0\le a<\pi$,

$G_\rho=\mathrm{C}\setminus\left\{z \;\middle|\; |z-z_1|\le\rho, |z-z_2|\le\rho, \dots, |z-z_n|\le\rho\right\}$.

Тогда справедлива формула:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k f(k)=-\pi\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\frac{f(z)}{\sin(\pi z)}. \tag{9.6}$$

Вопросы для самоконтроля

1 Как вычисляются интегралы по замкнутому контуру?

2 Как вычисляются несобственные интегралы?

3 Как вычисляются интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x,\cos x)dx$?

4 В чем суть леммы Жордана? Для каких интегралов она используется?

5 В каких случаях можно вычислить сумму ряда с помощью вычетов?

Решение типовых примеров

1 Вычислить $\oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{(z-1)^3(z^2+1)}$, где $\Gamma = \{\, z \in \mathbf{C} : |z-1-i| = 2\}$.

Решение. В круге $|z-1-i|<2$ данная функция имеет полюс 3-го порядка в точке $z_1 = 1$, простые полюса порядка в точках $z_{2,3} = \pm i$. Точка $z=-i$ не принадлежит кругу $|z-1-i|<2$. Согласно теореме 1 получим:

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{(z-1)^3(z^2+1)} = 2\pi i \cdot \left[\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{1}{(z-1)^3(z^2+1)} + \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(z-1)^3(z^2+1)} \right] =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{2!} \lim_{z\to 1} \left(\frac{(z-1)^3}{(z-1)^3(z^2+1)} \right)'' + \lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z-1)^3(z+i)(z-i)} \right] =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \left(\frac{1}{(z^2+1)} \right)'' + \lim_{z\to i} \frac{1}{(z-1)^3(z+i)} \right] =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \lim_{z\to 1} \left(\frac{2z}{(z^2+1)^2} \right)' + \frac{1}{(i-1)^3(i+i)} \right] =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \lim_{z\to 1} \frac{2\cdot(z^2+1)^2 - 2z\cdot 2\cdot(z^2+1)\cdot 2z}{(z^2+1)^4} + \frac{1}{2i\cdot(i-1)^3} \right] =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \lim_{z\to 1} \frac{2\cdot(z^2+1)(z^2+1-4z^4-4z^2)}{(z^2+1)^4} - \frac{i}{2\cdot(i-1)^3} \right] =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[-\frac{i}{2\cdot(i-1)^3} + \frac{1}{2} \cdot \lim_{z\to 1} \frac{2\cdot(1-4z^4-z^2)}{(z^2+1)^4} \right] =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\frac{2(1-4-1)}{(1+1)^4} - \frac{i}{2\cdot(i-1)^3} \right] = -\frac{\pi}{2}(1+i).$$

2 Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} \frac{e^z - 1}{z^2 + 2z - 3} dz$, где

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{2} \right| = 1 \right\}.$$

Решение. Контур Γ интегрирования есть окружность радиуса $R = 1$ с центром в точке $z = \frac{1}{2}$.

Найдем особые точки функции: $z^2 + 2z - 3 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = -3$. Точка $z_2 = -3$ лежит вне области, ограниченной контуром Γ, а $z_1 = 1$ находится внутри области. Определим характер точки $z_1 = 1$:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{(z-1)(z+3)} = \frac{\dfrac{e^z - 1}{z+3}}{z-1} = \frac{\varphi(z)}{z-1},$$

где $\varphi(z) = \frac{e^z - 1}{z+3}$ – аналитическая функция, $\varphi(1) = \frac{e-1}{4} \neq 0$.

Значит, точка $z = 1$ – простой полюс.

Тогда вычет равен

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \to 1} f(z)(z-1) = \lim_{z \to 1} \frac{e^z - 1}{(z-1)(z+3)}(z-1) =$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{e^z - 1}{z+3} = \frac{e-1}{4}.$$

По теореме 1 имеем:

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{e^z - 1}{z^2 + 2z - 3} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 2\pi i \frac{e-1}{4} = \pi i \frac{e-1}{2}.$$

3 Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + 9\right)^2}$.

Решение. Так как подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2}$ четная, то

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+9\right)^2}.$$

Введем функцию $f(z)=\dfrac{z^2}{\left(z^2+9\right)^2}$, которая на действительной оси (при $z=x$) совпадает $f(x)$. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости полюс 2-го порядка в точке $z=3i$. Вычет $f(z)$ относительно этого полюса равен:

$$\operatorname*{Res}_{z=ai}\frac{z^2}{\left(z^2+9\right)^2}=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{\left(z^2+9\right)^2}(z-3i)^2\right]=$$

$$=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+3i)^2}\right]=\lim_{z\to ai}\frac{2aiz}{(z+3i)^3}=\frac{1}{12i}.$$

Тогда с учетом (9.2) получим:

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+9\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{12i}=\frac{\pi}{12}.$$

4 Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

Решение. Функция $f(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^3}$ определена на всей действительной оси $-\infty<x<+\infty$. Аналитическое продолжение этой функции в верхнюю полуплоскость ($\operatorname{Im}z\ge 0$) есть функция $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^3}$, являющаяся аналитической в каждой точке верхней полуплоскости за исключением точки $z=i$ (полюса 3-го порядка). На действительной оси полюсов нет. При этом для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию $|z| = R > R_0 > 1$ имеет место оценка:

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{(z^2+1)^3}\right| < \frac{1}{|z|^6}.$$

Поэтому для исходного интеграла можно применить теорему 2:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{(z-i)^3}{(z^2+1)^3}\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to i} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{z\to i} \frac{12}{(z+i)^5} = -\frac{3i}{16}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{1}{(x^2+1)^3} = 2\pi i\left(-\frac{3i}{16}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

5 Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+9}\,dx$.

Решение. Введем вспомогательную функцию

$$f(z) = \frac{ze^{i2z}}{z^2+9}.$$

Видно, если $z = x$, то $f(z)$ совпадает с подынтегральной функцией $\varphi(x) = \frac{x\sin 2x}{x^2+9}$.

Рассмотрим контур C_R (рисунок 9. 1) При достаточно большом R на контуре C_R функция $g(z) = \frac{z}{z^2+9}$ удовлетворяет неравенству $|g(z)| \le \frac{R}{R^2+9}$. Следовательно, $g(z)$ стремится к нулю при $R \to \infty$.

Значит, по лемме Жордана $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{ze^{i2z}}{z^2+9}\,dz = 0$.

Так как точка $z=3i$ является простым полюсом, то вычет равен

$$\operatorname*{Res}_{z=3i}\frac{ze^{i2z}}{z^2+9}=\lim_{z\to 3i}\frac{ze^{i2z}}{z^2+9}(z-3i)=\frac{1}{2}e^{-6}.$$

Для любого $R>3$ по теореме 1 имеем

$$\int_{-R}^{+R}\frac{xe^{i2x}}{x^2+9}dx+\int_{C_R}\frac{xe^{i2x}}{x^2+9}dx=2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=3i}\frac{ze^{i2z}}{z^2+9}=2\pi i\cdot\frac{1}{2}e^{-6}=\pi ie^{-6}.$$

Переходя к пределу при $R\to\infty$, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{i2x}}{x^2+9}dx=\pi ie^{-6}.$$

Отделяя слева и справа действительные и мнимые части, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+9}dx=\pi e^{-6}.$$

6 Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$.

Решение. Имеем:

$$z=e^{ix};\ dx=\frac{dz}{iz}:\ \cos x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2+1}{2z}.$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2+\dfrac{z^2+1}{2z}}\frac{dz}{iz}=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4z+1}.$$

Найдем особые точки функции $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4z+1}$:

$$z^2+4z+1=0;$$

$$z_1=-2+\sqrt{3};\ z_2=-2-\sqrt{3}$$

Точка z_1 лежит в круге $|z|<1$, а точка z_2 – вне круга. Тогда по формуле (9.3) получим:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2}{i} 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} \frac{1}{z^2+4z+1} =$$

$$= 4\pi \lim_{z\to\sqrt{3}-2} \frac{\left(z-\sqrt{3}+2\right)}{\left(z-\sqrt{3}+2\right)\left(z+\sqrt{3}+2\right)} =$$

$$= 4\pi \lim_{z\to\sqrt{3}-2} \frac{1}{z+\sqrt{3}+2} = \frac{4\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

7 Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$. Эта функция аналитична всюду на $\mathbb{C}$, кроме точек $z_1 = -2i$ и $z_2 = 2i$, которые являются простыми полюсами.

Поскольку

$$f(z) = \frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{z^2\left(1+\frac{4}{z^2}\right)},$$

то $\frac{1}{z^2+4} = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ при $z \to \infty$.

Применяя теорему 3, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4} = -\pi\left[\operatorname*{Res}_{z=-2i} \frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^2+4} + \operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^2+4}\right] =$$

$$= -\pi\left[\lim_{z\to-2i} \frac{\operatorname{ctg}\pi z}{2z} + \lim_{z\to 2i} \frac{\operatorname{ctg}\pi z}{2z}\right] = -\pi\left[\frac{\operatorname{ctg}(-2i\pi)}{-2i\cdot 2} + \frac{\operatorname{ctg}(2i\pi)}{2i\cdot 2}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\operatorname{cth} 2\pi.$$

Ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+4}$ можно записать в виде

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}=\ldots+\frac{1}{(-2)^2+4}+\frac{1}{(-1)^2+4}+\frac{1}{0^2+4}+\frac{1}{1^2+4}+\frac{1}{2^2+4}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{4}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}.$$

Отсюда находим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}-\frac{1}{8}.$$

Искомая сумма данного ряда равна

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}=\frac{\pi}{4}\operatorname{cth}2\pi-\frac{1}{8}.$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_{|z|=4}\frac{e^z-1}{z^2+z}dz$;

б) $\oint\limits_{|z|=4}\frac{zdz}{(z-1)^2(z+2)}$;

в) $\oint\limits_{|z|=\frac{2}{3}}\left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz$;

г) $\oint\limits_{|z|=1}z^3\sin\frac{1}{z}dz$;

д) $\oint\limits_{|z|=4}\frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^3}$;

е) $\oint\limits_{|z|=\sqrt{3}}\frac{\sin\pi z}{z^2-z}dz$;

л) $\oint\limits_{|z|=1}z^3\sin\frac{1}{z}dz$;

м) $\oint\limits_{|z|=4}\frac{\cos zdz}{z^2-4}$;

н) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}}(z+1)e^{\frac{1}{z}}dz$;

о) $\oint\limits_{|z|=4}\frac{z+1}{z^2+2z-3}dz$;

п) $\oint\limits_{|z|=1}z\operatorname{tg}\pi z dz$;

р) $\oint\limits_{|z+1|=4}\frac{zdz}{e^z+3}$;

ж) $\oint\limits_{|z-i|=1} \dfrac{e^z dz}{z^4 + 2z^2 + 1}$;

с) $\oint\limits_{|z-i+2|=2} \dfrac{1-\cos^2 z}{z^2 + z - 2} dz$;

и) $\oint\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2 + 1} dz$;

т) $\oint\limits_{|z-i|=3} \dfrac{z \sin z}{z^2 + 5z - 6} dz$;

к) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z \sin z dz}{(z-1)^5}$;

у) $\oint\limits_{|z|=1} \sin \dfrac{1}{z^2} dz$.

2 Вычислить с помощью вычетов интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{3 - 2\cos x + \sin x}$;

л) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{2\,dx}{2 + \sin x}$;

б) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{1 - \cos x}{2 + \sin x} dx$;

м) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\sin 2x\, dx}{8 + \sin x}$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$;

н) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+1)^2}$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$;

о) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$;

д) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x \cos x\ dx}{x^2 - 2x + 10}$;

п) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x \sin x\, dx}{x^2 + 4x + 20}$;

е) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos x dx}{x^2 + 9}$;

р) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x^3 \sin 2x dx}{(1+x^2)^2}$;

ж) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{1 - 4\cos x + 4}$;

с) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{3 + \cos x}$;

и) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{2x+4}{(x^2+2x+10)^2} dx$;

т) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{(x-3)^2}{(x^2+9)^3} dx$;

к) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2 \cos 2x}{\left(x^2+1\right)^2} dx$;

у) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x \sin x}{\left(x^2+9\right)^2} dx$.

3 Найти суммы следующих рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+4)^2}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos \alpha k}{k^2+9}$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin \frac{1}{z} dz$;

л) $\oint\limits_{|z+i|=3} \frac{z \cos z}{z^2-2z-8} dz$;

б) $\oint\limits_{|z-i+1|=2} \frac{e^{z^2}\, dz}{z^2+3z+2}$;

м) $\oint\limits_{|z-1+i|=4} \frac{\cos z\, dz}{z^2-6z+9}$;

в) $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{z \sin z}{z^2+5z-6} dz$;

н) $\oint\limits_{|z-1+i|=4} \frac{e^{3z}}{z^2+iz} dz$;

г) $\oint\limits_{|z-i-1|=2} \frac{e^{iz}}{z^2+4} dz$;

о) $\oint\limits_{|z-i-2|=3} \frac{e^{\frac{1}{(z+3)}}}{z^2-6z+9} dz$;

д) $\oint\limits_{|z|=2} (z+1) e^{\frac{1}{z+1}} dz$;

п) $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{1}{z} + e^{z^2} \sin \frac{1}{z^2}\right) dz$;

е) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} dz$;

р) $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} dz$;

ж) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{\sin^3 z \cos z}$;

с) $\oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^4+1}$, $\Gamma : x^2+y^2=2x$;

и) $\oint\limits_{|z-5-3i|=6} \frac{e^{3z}}{z^2-18z+81} dz$;

т) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{(z-1)^2} dz$;

к) $\oint\limits_{|z-1|=5} \dfrac{e^{z^2}}{z^2+4z+4}\,dz$; у) $\oint\limits_{|z|=1} z^5 \sin\dfrac{1}{z^3}\,dz$.

2 Вычислить с помощью вычетов интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\cos x\,dx}{4+2\sin x+\cos x}$; л) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\cos x\,dx}{3-2\sin x+\cos x}$;

б) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{(1-\sin 2x)dx}{\sin x+\cos x+2}$; м) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\sin 2x\,dx}{5+2\sin x}$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{2x dx}{(x^2+8x+25)^2}$; н) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x+1}{(x^2+9)^2}\,dx$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2 dx}{(x^2+2x+2)^2}$; о) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$;

д) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{\cos x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$; п) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\sin 2x}{x^2+4}\,dx$;

е) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{\cos x}{x^2+9}\,dx$; р) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\sin 2x\,dx}{x^2+8x+25}$;

ж) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\cos 2x dx}{1-6\cos x+9}$; с) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{1+2\cos x}$;

и) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+9)^2}$; т) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^4 dx}{(x^2+1)^4}$;

к) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x^3\sin 2x}{(1+x^2)^2}\,dx$; у) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

3 Найти суммы следующих рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(k+9)^2}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \cos\alpha k}{k^2+4}$.

Тема 2 Операционное исчисление

Практическое занятие 1 Преобразование Лапласа

1.1 Оригиналы и их изображения
1.2 Преобразование Лапласа
1.3 Свойства преобразования Лапласа

1.1 Оригиналы и их изображения

Комплекснозначная функция $f(t)$ называется *оригиналом*, если она удовлетворяет условиям:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) при $t \geq 0$ функция $f(t)$ кусочно-непрерывна;

3) при $t \to \infty$ функция $f(t)$ имеет ограниченную степень роста, т. е. существует такое положительное число M и такое неотрицательное число s_0, что для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство:

$$\left| f(t) \right| \leq M \cdot e^{s_0 t}, \; M > 0, \;\; s_0 \geq 0 .$$

Число s_0 называется *показателем роста* функции $f(t)$.

Если $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$ – оригиналы с показателями роста s_1, s_2, ..., s_n, то функция $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots c_n f_n(t)$, $c_i \in \mathbb{C}$, является также оригиналом с показателем роста $s_0 = \{ s_1, s_2, ..., s_n \}$.

Пусть функция $f(t)$ – оригинал с показателем роста s_0. Тогда являются оригиналами следующие функции:

а) $\left| f(t) \right|$ с показателем роста s_0;

б) $f_1(t) = f(\alpha \cdot t)$, $\alpha > 0$, с показателем роста $\alpha \cdot s_0$;

в) $f_2(t) = e^{\lambda t} f(t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, показатель роста которой равен

$$s = \begin{cases} s_0 + \operatorname{Re}\lambda, & \text{если } s_0 + \operatorname{Re}\lambda > 0, \\ 0, \quad \text{если} & s_0 + \operatorname{Re}\lambda < 0; \end{cases}$$

г) $f_3(t)=\begin{cases} 0, & \text{если } t<\tau, \\ f(t-\tau), & \text{если } t\geq\tau, \end{cases}$

с показателем роста s_0, $\tau>0$;

д) $f_4(t)=t^z\cdot f(t)$, $z\in\mathbb{C}$, с показателем роста s_0;

– $g(t)=\int\limits_0^t f(z)dz$, $0\leq t<\infty$, с показателем роста s_0.

1.2 Преобразование Лапласа

Изображением (*интегралом Лапласа*) оригинала $f(t)$ называется несобственный интеграл вида

$$F(p)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,$$

зависящий от комплексного параметра p.

Преобразованием Лапласа называется операция перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается в виде

$$f(t)\doteqdot F(p).$$

Пусть функция $f(t)$ оригинал с показателем роста $s_0>0$.

Теорема 1 (существование изображения) Для оригинала $f(t)$ с показателем роста $s_0>0$ изображение $F(p)$ существует в полуплоскости $\operatorname{Re} p=u>s_0$, *причем функция $F(p)$ является аналитической в этой полуплоскости.*

Теорема 2 (необходимый признак существования изображения) Если функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, то $\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to\infty} F(p)=0$.

Теорема 3 (единственность оригинала) Если функции $F(p)$ и $\Phi(p)$ совпадают, то совпадают между собой и соответствующие оригиналы $f(t)$ и $\varphi(t)$ во всех точках, в которых они непрерывны.

1.3 Свойства преобразования Лапласа

Преобразование Лапласа обладает *свойствами*:

– *линейность:* линейной комбинации оригиналов соответствует линейная комбинация изображений, т. е. если $f_1(t) \doteq F_1(p)$ и $f_2(t) \doteq F_2(p)$ и c_1, c_2 – постоянные числа, то

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \doteq c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p);$$

– *подобие:* если $f(t) \doteq F(p)$ и $\lambda > 0$, то

$$f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} \cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right);$$

– *запаздывание:* если $f(t) \doteq F(p)$ и $\tau > 0$, то

$$f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} \cdot F(p);$$

– *опережение*: если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$f(t + \tau) \doteq e^{p\tau}\left[F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt\right];$$

– *изображение периодической функции:* пусть оригинал $f(t)$ имеет период T и он может быть представлен в виде сходящегося ряда

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(t - nT),$$

где $f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } 0 < t < T, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > T. \end{cases}$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_0(t - nt) \doteq F_0(p) \cdot \frac{1}{1 - e^{-pT}};$$

– *смещение*: если $f(t) \doteq F(p)$ и $a \in \square$, то

$$e^{at} \cdot f(t) \doteq F(p - a);$$

– *дифференцирование оригинала*: если $f(t) \doteq F(p)$ и функции $f'(t)$, $f''(t), \ldots,$ $f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то для любого $k = 1, 2, \ldots, n$

$$f^{(k)}(t) \doteq p^k \cdot F(p) - p^{k-1} \cdot f(0) - \ldots - f^{(k-1)}(0),$$

в частности $f'(t) \doteq p \cdot F(p) - f(0)$;

– *дифференцирование изображения:* если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t), \; n = 1, 2, \ldots;$$

– *интегрирование оригинала:* если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\int_0^t f(z)dz \doteq \frac{1}{p} F(p);$$

– *интегрирование изображения*: если $f(t) \doteq F(p)$ и интеграл $\int_p^{\infty} F(\rho)d\rho$ сходится, то

$$\int_p^{\infty} F(\rho)d\rho \doteq \frac{f(t)}{t};$$

– пусть $\frac{f(t)}{t}$ – оригинал непрерывный на $0 \le t < \infty$, $f(t) \doteq F(p)$ и несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ сходится. Тогда имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(x)dx;$$

– *умножение изображений*: если $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > s_1$, и $f_2(t) \doteq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > s_2$, то

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)d\tau;$$

– *теорема Бореля*: свертке оригиналов

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_2(y) \cdot f_1(t-y)dy$$

соответствует произведение изображений

$$f_1(t) * f_2(t) \doteq F_1(p) \cdot F_2(p);$$

– *интеграл Дюамеля*: если $f(t) \doteq F(p)$ и $g(t) \doteq G(p)$, то

$$pF(p)G(p) \doteq f(0)g(t) + f'(t) * g(t),$$
$$pF(p)G(p) \doteq g(0)f(t) + g'(t) * f(t).$$

Ниже приведены изображения некоторых функций:

$1 \doteqdot \dfrac{1}{p}$;

$e^{at} \doteqdot \dfrac{1}{p-a}$;

$t \doteqdot \dfrac{1}{p^2}$;

$t^n \doteqdot \dfrac{n!}{p^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$;

$e^{at} \cdot t^n \doteqdot \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$;

$\sin wt \doteqdot \dfrac{w}{p^2 + w^2}$;

$\cos wt \doteqdot \dfrac{p}{p^2 + w^2}$;

$\operatorname{sh} wt \doteqdot \dfrac{w}{p^2 - w^2}$;

$\operatorname{ch} wt \doteqdot \dfrac{p}{p^2 - w^2}$;

$e^{at} \cdot \operatorname{sh} wt \doteqdot \dfrac{w}{(p-a)^2 - w^2}$;

$e^{at} \cdot \operatorname{ch} wt \doteqdot \dfrac{p-a}{(p-a)^2 - w^2}$;

$t \cdot \sin wt \doteqdot \dfrac{2wp}{\left(p^2 + w^2\right)^2}$;

$t \cdot \cos wt \doteqdot \dfrac{p^2 - w^2}{\left(p^2 + w^2\right)^2}$;

$t \cdot \operatorname{sh} wt \doteqdot \dfrac{2wp}{\left(p^2 - w^2\right)^2}$;

$t \cdot \operatorname{ch} wt \doteqdot \dfrac{p^2 + w^2}{\left(p^2 - w^2\right)^2}$;

$e^{at} \cdot \sin wt \doteqdot \dfrac{w}{(p-a)^2 + w^2}$;

$e^{at} \cdot \cos wt \doteqdot \dfrac{p-a}{(p-a)^2 + w^2}$..

Вопросы для самоконтроля

1 Какая функция называется оригиналом?
2 Какой интеграл называется изображением?
3 При каких условиях изображение существует?
4 Сформулируйте необходимый признак существования изображения?
5 Сформулируйте теорему единственности оригинала?
6 Какая операция называется преобразованием Лапласа?
7 Какими свойствами обладает преобразование Лапласа?

Решение типовых примеров

1 Проверить, является ли оригиналом функция:

$$f\left(t\right)=\begin{cases} e^{2t}\sin t, \text{ при } t>0, \\ 0, \text{ при } t<0. \end{cases}$$

Решение. Проверим, удовлетворяет ли данная функция условиям 1-3 определения оригинала.

В самом деле:

1) $f(t)\equiv 0$ при $t<0$;

2) при $t\geq 0$ функция непрерывна;

3) для любых $t\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\left|e^{2t}\sin t\right|\leq e^{2t}.$$

Отсюда $M=1,\ s_0=2$.

2 Найти изображения функций:

а) Хевисайда

$$\eta(t)=\begin{cases} 1 \quad \text{при } t\geq 0, \\ 0 \quad \text{при } t<0, \end{cases}$$

б) $f\left(t\right)=e^{4t}$.

Решение. а) функция $\eta(t)$ является оригиналом с показателем роста $s_0=0$. Тогда согласно определению изображения получим:

$$F\left(p\right)=\int_0^\infty 1\cdot e^{-pt}dt=\lim_{N\to\infty}\int_0^N 1\cdot e^{-pt}dt=\lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{p}\cdot e^{-pt}\Big|_0^N\right)=\frac{1}{p}$$

при $u=\operatorname{Re} p>0$;

б) функция $f\left(t\right)=e^{4t}$ является оригиналом с показателем роста $s_0=4$. Поэтому изображение $F\left(p\right)$ может быть определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p>4$. Имеем:

$$F\left(p\right)=\int_0^\infty e^{4t}\cdot e^{-pt}dt=\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-\left(p-4\right)t}dt=-\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{p-4}e^{-\left(p-4\right)t}\Big|_0^N\right)=$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{p-4}-\frac{e^{-(p-4)N}}{p-4}\right)=\frac{1}{p-4}.$$

Функция $F(p)=\dfrac{1}{p-4}$ является аналитической не только в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 4$, но и на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением точки $p = 4$. Такая особенность наблюдается и для многих изображений.

3 Пользуясь определением, найти изображение функции

$$f(x)=\sin t.$$

Решение. Для $\operatorname{Re} p > 0$ имеем:

$$F(p)=\int_0^{+\infty}\sin t\, e^{-px}dt=\left[\begin{array}{l} u=e^{-pt};\ du=-pe^{pt}dt; \\ dv=\sin t\, dt;\ v=-\cos t \end{array}\right]=$$

$$=-e^{-pt}\cos t\Big|_0^{+\infty}-p\int_0^{+\infty}\cos t\ e^{-pt}dt=\left[\begin{array}{l} u=e^{-pt};\ du=-pe^{-pt}dt; \\ dv=\cos t\, dt;\ v=\sin t \end{array}\right]=$$

$$=1-p\left(pe^{-pt}\sin t\Big|_0^{+\infty}-p\int_0^{+\infty}\sin t\, e^{-pt}dt\right)=$$

$$=1-p^2\int_0^{+\infty}\sin t\, e^{-pt}dt.$$

Отсюда

$$\int_0^{+\infty}\sin t\, e^{-pt}dt=1-p^2\int_0^{+\infty}\sin t\, e^{-pt}dt.$$

Выразим искомый интеграл:

$$\left(1+p^2\right)\int_0^{+\infty}\sin t\, e^{-pt}dt=1.$$

Тогда

$$F(p)=\int_0^{+\infty}\sin t\, e^{-pt}dt=\frac{1}{1+p^2}.$$

4 Пользуясь свойством подобия, найти изображение функции

$$f(t)=\sin 2t\,.$$

Решение. Так как $\sin t=\dfrac{1}{p^2+1}$, $\operatorname{Re} p>0$, то по свойству подобия получим:

$$\sin 2t \doteq \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{2}\frac{4}{p^2+4}=\frac{2}{p^2+4}\,,\ \operatorname{Re} p>0\,.$$

5 Пользуясь свойством смещения, найти изображение оригинала $f(t)=e^{-t}\cos 2t$.

Решение. Так как $\cos 2t \doteq \dfrac{p}{p^2+4}$ и $a=-1$, то по свойству смещения получим:

$$e^{-t}\cos 2t \doteq \frac{p+1}{(p+1)^2+4}\,.$$

6 Пользуясь свойством запаздывания, найти изображение оригинала

$$f(t-1)=(t-1)^2\eta(t-1).$$

Решение. Для функции $f(t)=t^2\eta(t)$ имеем $f(t)\doteq\dfrac{2}{p^3}$. По свойству запаздывания находим:

$$(t-1)^2\sigma(t-1)\doteq e^{-p}\,\frac{2}{p^3}\,.$$

7 Найти изображение оригинала $f(t)$, заданного графиком на рисунке 1. 1.

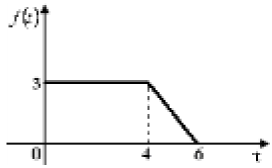

Рисунок 1. 1 – График функции $f(t)$
к типовому примеру 7

Решение. Аналитическое выражение для функции $f(t)$ имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases} 0, \text{ при } t<0, \\ 3, \text{ при } 0\le t<4, \\ 9-\dfrac{3}{2}t, \text{ при } 4\le t<6, \\ 0, \text{ при } t\ge 6. \end{cases}$$

С помощью единичной функции Хевисайда функцию $f(t)$ можно записать следующим образом:

$$f(t)=3\eta(t)-3\eta(t-4)+\left(9-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-4)-\left(9-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-6)=$$

$$=3\eta(t)+\left(6-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-4)-\left(9-\frac{3}{2}t\right)\eta(t-6).$$

Для нахождения изображения этой функции представим ее в форме:

$$f(t)=3\eta(t)+\varphi_1(t-4)\eta(t-4)+\varphi_2(t-6)\eta(t-6),$$

Имеем:

$$f(t)=3\eta(t)-\frac{3}{2}(t-4)\eta(t-4)+\frac{3}{2}(t-6)\eta(t-6).$$

Отсюда $\varphi_1(t)=-\frac{3}{2}t$, $\varphi_2(t)=\frac{3}{2}t$. Так как

$$\varphi_1(t)=-\frac{3}{2}t\doteq-\frac{3}{2p^2},\ \varphi_2(t)=\frac{3}{2}t\doteq\frac{3}{2p^2},$$

то по свойству запаздывания находим изображение

$$f(t)\doteq\frac{3}{p}-\frac{3}{2p^2}e^{-4p}+\frac{3}{2p^2}e^{-6p}.$$

8 Найти изображение π -периодичной функции

$$f(t)=|\sin t|$$

при $0\le t\le\pi$, график которой представлен на рисунке 1. 2.

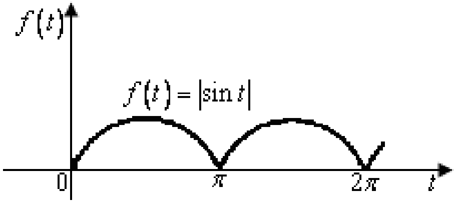

Рисунок 1. 2 – График π-периодичной функции
$f(t)=|\sin t|$

Решение. Учитывая типовой пример 3 и свойство изображения периодической функции, имеем:

$$|\sin t| \doteq \frac{1}{1-e^{-\pi\cdot p}}\cdot\int_0^{\pi}\sin t\cdot e^{-pt}dt = \frac{1}{1-e^{-\pi\cdot p}}\cdot\left.\frac{e^{-pt}(p\sin t-\cos t)}{p^2+1}\right|_0^{\pi} =$$

$$=\frac{1+e^{-\pi p}}{(1-e^{-\pi p})\cdot(p^2+1)}.$$

9 Найти изображение функции $f(t)=\sin^2 t$.

Решение. Пусть $f(t)\doteq F(p)$. Тогда

$$f'(t)\doteq pF(p)-f(0).$$

Так как $f(0)=\sin^2 0=0$, и

$$(\sin^2 t)' = 2\sin t\cos t = \sin 2t \doteq \frac{2}{p^2+4},$$

то

$$\frac{2}{p^2+4} = pF(p).$$

Откуда

$$F(p)=\frac{2}{p(p^2+4)}.$$

Значит,

$$\sin^2 t \doteq \frac{2}{p(p^2+4)};$$

10 Найти изображение функции $f(t)=t^2e^{3t}$.

Р е ш е н и е . Имеем $e^{3t} \doteq \dfrac{1}{p-3}$.

Применяя свойство дифференцирования изображения, получаем

$$t^2e^{3t} \doteq (-1)^2\left(\frac{1}{p-3}\right)'' = \left(-\frac{1}{(p-3)^2}\right)' = \frac{2}{(p-3)^3}.$$

11 Найти изображение оригинала $\int\limits_0^t \tau e^{\tau} d\tau$.

Р е ш е н и е . Так как $e^t \doteq \dfrac{1}{p-1}$, то по свойству дифференцирования изображения имеем:

$$te^t \doteq -\left(\frac{1}{p-1}\right)' = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

По свойству интегрирования оригинала получим:

$$\int\limits_0^t \tau e^{\tau} d\tau = \frac{1}{p(p-1)^2}.$$

12 Используя свойство интегрирования изображения, найти изображение интегрального синуса $\mathrm{Si}\, t = \dfrac{\sin t}{t}$.

Р е ш е н и е . Так как $\sin t \doteq \dfrac{1}{p^2+1}$, то по свойству интегрирования изображения получим:

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int\limits_p^{\infty} \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p \,\Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} p.$$

13 Найти изображение оригинала $\psi(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)e^{\tau} d\tau$.

Р е ш е н и е . Оригинал $\psi(t)$ есть свертка оригиналов $g(t) = t$, $f(t) = e^t$. По свойству свертки имеем:

$$\psi(t) \doteq \Psi(p) = F(p)G(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

Задания для аудиторной работы

1 Проверить, какие из указанных функций являются функциями оригиналами:

а) $f(t) = 2^t \eta(t)$;

б) $f(t) = \mathrm{ch}(2-i)t\,\eta(t)$;

в) $f(t) = \dfrac{1}{t-3}\eta(t)$;

г) $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}\eta(t)$.

2 Найти изображения следующих функций:

1) $2t+3$;

2) te^{2t};

3) $\sin 3t$;

4) $\int\limits_0^t (t-\tau)^2 \,\mathrm{ch}\,\tau\, d\tau$;

5) $t + 2\sin t$;

6) $4t + 4\,\mathrm{sh}\,t + 2e^t$;

7) e^{4t};

8) $\sin wt$;

9) $\sin^2 t$;

10) $e^{2t}\sin 2t$;

11) $e^{-t}t^3 + e^{4t}\,\mathrm{sh}\,t$;

12) $\int\limits_0^t \tau\,\mathrm{sh}\,2\tau\, d\tau$;

13) $\dfrac{\sin^2 t}{t}$;

14) $\cos^2 t$;

19) $\sin(t-2)\eta(t-2)$;

20) $\dfrac{e^t - 1}{t}$;

21) $e^{t-2}\eta(t-2)$;

22) $\int\limits_0^t e^{t-\tau}\sin\tau\, d\tau$;

23) $\sin 2t \cos 4t$;

24) $2\,\mathrm{ch}^2\, 2t - 4e^{5t}$;

25) $e^{-4t}\sin^2 t$;

26) $\cos^2(t-1)\eta(t-1)$;

27) $(t-1)^2\eta(t)$;

28) $\sin^3 t$;

29) $(t^3 + t)\sin 2t$;

30) $\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau}\, d\tau$;

31) $\dfrac{\cos t - \cos 2t}{t}$;

32) $3 + 4t + 2t^2$;

15) $t\cos 3t$;

16) $t^2\cos 2t$;

17) $t^2\left(e^{2t}+\operatorname{ch}3t\right)$;

18) $\int\limits_0^t \sin\tau d\tau$;

33) $1+e^{-2t}+t^2$;

34) $t\sin wt$;

35) $e^{2t}\sin t$;

36) $\int\limits_0^t \frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}d\tau$.

3 По графику оригинала (рисунок 1. 3) найти изображение.

Задания для домашней работы

1 Проверить, какие из указанных функций являются функциями оригиналами:

а) $f(t)=e^{(2+4i)t}\eta(t)$;

б) $f(t)=\operatorname{tg}t\cdot\eta(t)$;

в) $f(t)=\frac{1}{t+5}\eta(t)$;

г) $f(t)=e^{-t}\cos t\,\eta(t)$.

2 Найти изображение следующих функций:

1) $2te^{3t}$;

2) $\cos 2t$;

3) $\frac{1-\cos t}{t}$;

4) $\int\limits_0^t \cos^2 2\tau d\tau$;

5) $4t^2-\operatorname{ch}t+te^t$;

6) $t^2-4t+3\cos t$;

7) $\cos 3t$;

8) $\cos wt$;

9) $\cos^3 t$;

10) $e^{-3t}\cos 4t$;

19) t^3-2t+1;

20) $\operatorname{ch}4t$;

21) $\frac{e^t-e^{-t}}{t}$;

22) $\int\limits_0^t (\cos t-\tau)e^{2\tau}d\tau$;

23) $\cos mt\cos nt$;

24) $\sin^4+5\operatorname{sh}^2 3t$;

25) $e^{5t}\cos^2 t$;

26) $e^t\eta(t-3)$;

27) $t^2\cdot\eta(t-1)$;

28) $\cos^4 t$;

11) $e^t\left(t^2+2t+\operatorname{ch}t\right)$;

12) $\cos(t-3)\eta(t-3)$;

13) $\sin^2(t-2)\eta(t-2)$;

14) $t\sin 2t$;

15) te^t ;

16) $t\left(\sin t+e^{4t}\right)$;

17) $t^2\left(e^{2t}-\operatorname{sh}t\right)$;

18) $\int\limits_0^t(\tau+1)\cos 2\tau d\tau$;

29) $\left(t^2-t+2\right)\cos 3t$;

30) $\int\limits_0^t\tau^2\operatorname{sh}\tau d\tau$;

31) $\dfrac{e^t-1-t}{t}$;

32) $\int\limits_0^t e^{2(\tau-t)}\tau^2 d\tau$;

33) $\int\limits_0^t e^{2(t-\tau)}\sin\tau\cos\tau d\tau$;

34) $1+e^{-2t}+t^2$;

35) $t\sin wt$;

36) $\int\limits_0^t\dfrac{1-e^{-\tau}}{\tau}d\tau$.

3 По графику оригинала (рисунок 1. 4) найти изображение.

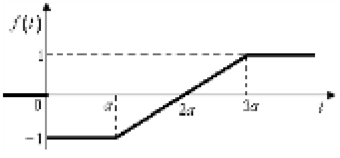

Рисунок 1. 3 – Рисунок к задаче 3 аудиторной работы

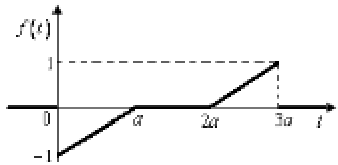

Рисунок 1. 4 – Рисунок к задаче 3 домашней работы

Практическое занятие 2 **Восстановление оригинала по изображению**

2.1 Обратное преобразование Лапласа и теоремы разложения
2.2 Связь преобразования Лапласа с преобразованием Фурье

2.1 Теоремы разложения

Для восстановления оригинала $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$ в простейших случаях используется таблица изображений. Дополнительное применение свойств изображений позволяет существенно расширить возможности восстановления оригинала по заданному изображению.

Теорема 1 (Римана-Меллина) Пусть функция $f(t)$ *оригинал с показателем роста* s_0*, а* $F(p)$ *– ее изображение. Тогда в любой точке* t *непрерывности оригинала* $f(t)$ *справедлива формула Римана-Меллина*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}F(p)e^{pt}dp,$$

где интегрирование производится вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = u$, $u > s_0$*, и интеграл понимается в смысле главного значения.*

Формула Римана-Меллина

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}F(p)e^{pt}dp$$

является обратной к формуле $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ и называется *обратным преобразованием Лапласа*.

В точке t_0, являющейся точкой разрыва 1-го рода функции $f(t)$, правая часть формулы Римана-Меллина равна

$$\frac{1}{2}\left(f(t_0-0)+f(t_0+0)\right).$$

Непосредственное применение формулы обращения для восстановления оригинала $f(t)$ по изображению $F(p)$ затруднительно. Для нахождения оригинала обычно пользуются теоремами разложения.

Теорема 2 (1-я теорема разложения) Если функция $F(p)$ в окрестности точки $p=\infty$ может быть представлена в виде ряда Лорана

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{p^{k+1}}=\frac{c_0}{p}+\frac{c_1}{p^2}+\frac{c_2}{p^3}+\dots,$$

то функция $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\cdot\frac{t^k}{k!}=c_0+c_1t+c_2\cdot\frac{t^2}{2!}+\dots$, $t\ge 0$, *является оригиналом, имеющим изображение* $F(p)$:

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{p^{k+1}}\doteq\sum_{k=0}^{\infty}c_k\cdot\frac{t^k}{k!}=f(t).$$

Вторую теорему разложения можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3 (2-я теорема разложения) Если $F(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}$ *– рациональная правильная несократимая дробь,* p_1, p_2, …, p_n *– простые или кратные нули знаменателя* $Q(p)$, *то оригинал* $f(t)$, *соответствующий изображению* $F(p)$, *определяется формулой*

$$F(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}\doteq\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[\frac{P(p)}{Q(p)}\right]\cdot e^{p_k t}=f(t).$$

В частности, если знаменатель p_1, p_2, …, p_n – простые полюса, то функция

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}\cdot e^{p_k t}$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

Теорема 4 Пусть $F(p)$ *– функция комплексной переменной* p, *обладающая свойствами:*

1) функция $F(p)$, *первоначально заданная в полуплоскости* $\operatorname{Re}p=u>s_0$ *и удовлетворяющая в ней условиям:*

а) $F(p)$ *– аналитическая функция в полуплоскости* $\operatorname{Re} p = u > s_0$,

б) в области $\operatorname{Re} p \geq u > s_0$ *функция* $F(p)$ *стремится к нулю при* $|p| \to \infty$ *равномерно относительно* $\arg(p - s_0)$*;*

в) для всех $\operatorname{Re} p = u$, $u > s_0$, *сходится несобственный интеграл* $\int\limits_{u-i\infty}^{u+i\infty} |F(p)| dp$ *;*

г) может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость C_p *;*

2) аналитическое продолжение функции $F(p)$ *в полуплоскость* $\operatorname{Re} p \leq s_0$ *удовлетворяет условиям леммы Жордана.*

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{u-i\infty}^{u+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k} F(p) \cdot e^{p_k t},$$

где $t > 0$ *и* $p = p_k$ *– особые точки (полюсы, существенно особые точки) функции, являющейся аналитическим продолжением* $F(p)$ *в полуплоскость* $\operatorname{Re} p \leq s_0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

2.3 Связь преобразования Лапласа с преобразованием Фурье

Пусть функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста s_0 и имеет конечное число экстремумов. Тогда для нее можно записать интеграл Фурье. При этом имеет место формула:

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где $\Phi(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$.

Учитывая, что в интеграле Лапласа параметр $p = u + i\omega$, $\operatorname{Re} p = u$, и для сходимости интеграла выбирается $u > s_0$, то можно записать:

$$F(p)=F(u+i\omega)=\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ut}e^{-i\omega t}dt\,.$$

Сравнивая полученный интеграл Лапласа с преобразованием Фурье, видно, что изображение $F(u+i\omega)=F(p)$ есть прямое преобразование Фурье для функции $g(t)=f(t)\cdot e^{-ut}$.

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте теорему Римана-Меллина.
2 Что называется обратным преобразованием Лапласа?
3 В чем суть первой теоремы разложения?
4 Сформулируйте вторую теорему разложения.
5 Как связаны между собой преобразование Лапласа и преобразование Фурье?

Решение типовых примеров

1 Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{2p^2}{\left(p^2+1\right)^2}$.

Решение. Найдем оригинал непосредственно с помощью свойств преобразования Лапласа и таблицы изображений. Поскольку

$$\frac{2p^2}{\left(p^2+1\right)^2}=2p\cdot\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\,,$$

$$\frac{1}{p^2+1}\doteq\sin t\,,\qquad \frac{p}{p^2+1}\doteq\cos t\,,$$

то на основании формулы Дюамеля имеем

$$2p\cdot\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\doteq 2\int\limits_0^t\cos\tau\cdot\cos(t-\tau)d\tau+0=t\cos t+\sin t\,.$$

2 Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{1}{p\left(p^2+4\right)}$.

Решение. Из таблицы изображений имеем $\dfrac{2}{p^2+4} \doteq \sin 2t$. Используя свойства линейности и интегрирования оригинала, находим:

$$F(p)=\frac{1}{p\left(p^2+4\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{2}{p^2+4}\doteq\frac{1}{2}\int_0^t \sin 2\tau d\tau=$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 2\tau\,\Big|_0^t=\frac{1}{4}\left(1-\cos 2t\right).$$

3 Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$.

Решение. Функция $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$ является аналитической в точке $p=\infty$. Разложение ее в ряд Лорана в окрестности точки $p=\infty$ имеет вид:

$$F(p)=\frac{p}{p^2+1}=\frac{p}{p^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{p^2}\right)}=\left[\left|\frac{1}{p^2}\right|<1\Rightarrow |p|>1\right]=$$

$$=\frac{1}{p}\cdot\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}-\ldots\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^5}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{2n+1}}.$$

Следовательно, по 1-й теореме разложения при $t>0$ имеем

$$f(t)=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\ldots=\cos t.$$

4 Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p)=\frac{-5}{p(p-1)\left(p^2+4p+5\right)}.$$

Решение. Представим $F(p)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{-5}{p(p-1)\left(p^2+4p+5\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+4p+5}$$

Находим коэффициенты:

$$A=1;\ B=-\frac{1}{2};\ C=-\frac{1}{2};\ D=\frac{3}{2}.$$

Тогда по 2-й теореме разложения найдем оригинал:

$$\frac{-5}{p(p-1)\left(p^2+4p+5\right)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p+3}{p^2+4p+5}=$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p+2}{(p+2)^2+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1}\doteq$$

$$\doteq 1-\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos t-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin t.$$

5 Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{p-1}{(p+1)\left(p^2+4\right)}$.

Решение. Функция $F(p)$ правильная рациональная несократимая дробь, для которой точки $p_1=-1$, $p_2=-2i$, $p_3=2i$ являются простыми полюсами. Так как

– для $p_1=-1$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_1=-1}=\left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_1=-1}=-\frac{2}{5},$$

– для $p_2=-2i$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_2=-2i}=\left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_2=-2i}=\frac{-1-2i}{-8-4i}=\frac{1+2i}{8+4i}=\frac{4+3i}{20};$$

– для $p_3=2i$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_3=2i}=\left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_3=2i}=\frac{-1+2i}{-8+4i}=\frac{1-2i}{8-4i}=\frac{4-3i}{20},$$

то по 2-й теореме разложения получим:

$$f(t)=\frac{-2}{5}e^{-t}+\frac{4+3i}{20}e^{-2it}+\frac{4-3i}{20}e^{2it}=$$

$$=\frac{-2}{5}e^{-t}-\frac{2}{5}\cos 2t+\frac{3}{10}\sin 2t.$$

6 Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2-1\right)^2}$.

Решение. Функция $F(p)$ в точках $p_1=1$ и $p_2=-1$ имеет полюсы 2-го порядка

Следовательно, по второй теореме разложения находим:

$$F(p)=\frac{p}{\left(p^2-1\right)^2}\doteq\frac{1}{1!}\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\cdot\frac{e^{pt}p}{(p+1)^2}+\frac{1}{1!}\lim_{p\to -1}\frac{d}{dp}\cdot\frac{e^{pt}p}{(p-1)^2}=$$

$$=\lim_{p\to 1}\frac{\left(te^{pt}p+e^{pt}\right)(p+1)^2-e^{pt}p\cdot 2(p+1)}{(p+1)^4}+$$

$$+\lim_{p\to -1}\frac{\left(te^{pt}p+e^{pt}\right)(p-1)^2-e^{pt}p\cdot 2(p-1)}{(p-1)^4}=$$

$$=\frac{1}{16}\left[\left(te^{t}+e^{t}\right)4-4e^{t}\right]+\frac{1}{16}\left[\left(-te^{-t}+e^{-t}\right)4-4e^{-t}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}te^{t}-\frac{1}{4}te^{-t}=\frac{1}{2}t\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}=\frac{1}{2}t\,\mathrm{sh}\,t.$$

7 Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

Решение. Аналитическим продолжением функции $F(p)$ в левую полуплоскость $\operatorname{Re} p\le s_0$ является функция $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, удовлетворяющая условиям леммы Жордана и имеющая две особые точки – полюсы первого порядка $p_1=-i\omega$ и $p_2=i\omega$. Поэтому при $\operatorname{Re} p=u\ge 0$ и $t>0$ по теореме 4 имеем:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}e^{pt}dp=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,e^{p_k t}=$$

$$=\frac{\omega e^{i\omega t}}{2i\omega}-\frac{\omega e^{-i\omega t}}{2i\omega}=\sin\omega t.$$

Задания для аудиторной работы

Найти оригиналы по изображению:

1 $\dfrac{2e^{-p}}{p^3}+\dfrac{e^{-2p}}{p-1}$.

2 $\dfrac{p}{(p+1)^2}$.

3 $\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

4 $\dfrac{3p^2}{(p^3-1)^2}$.

5 $\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$.

6 $e^{-\frac{1}{p}}-1$.

7 $\dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$.

8 $\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

9 $\dfrac{1}{p^2+2p-3}$.

10 $\dfrac{2p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

11 $\dfrac{p+1}{p^2+4p+5}$.

12 $\dfrac{1}{p^2+4p+5}$.

13 $\dfrac{1}{p+2p+p^3}$.

14 $\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$.

15 $\dfrac{e^{-2p}+2e^{-3p}+3e^{-4p}}{p^2+1}$.

16 $\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$.

17 $\sin\dfrac{1}{p}$.

18 $\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

19 $\dfrac{p}{(p^3+1)^2}$.

20 $\dfrac{p}{p^2+2p+2}$.

21 $\dfrac{2}{p^2+3p+2}$.

22 $\dfrac{3p}{(p^2+9)(p^2+1)}$.

Задания для домашней работы

Найти оригиналы по изображению:

1 $\dfrac{e^{-2p}}{p^2}+\dfrac{e^{-3p}}{p+3}$.

2 $\dfrac{1}{p^2+2p+2}$.

3 $\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

4 $\dfrac{e^{-p}}{p^2-1}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2-4}$.

5 $\dfrac{1}{7-p+p^2}$.

6 $\dfrac{1}{p^2\left(p^2+1\right)^2}$.

7 $\dfrac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}$.

8 $\dfrac{p^2+2}{\left(p^2+4\right)^2}$.

9 $\dfrac{3}{p^2+4p-5}$.

10 $\dfrac{6}{\left(p^2+4\right)\left(p^2+9\right)}$.

11 $\dfrac{p}{p^2+8p+17}$.

12 $\dfrac{1}{p^2+4p+3}$.

13 $\dfrac{p}{\left(p^2+1\right)^2}$.

14 $\dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

15 $\dfrac{e^{-p}}{p^2}+\dfrac{2e^{-2p}}{p^3}+\dfrac{6e^{-3p}}{p^4}$.

16 $\dfrac{1}{p^2\left(p^2+1\right)}$.

17 $\ln\left(1+\dfrac{1}{p}\right)$.

18 $\dfrac{p\lambda}{\left(p^2+\lambda^2\right)^2}$.

19 $\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

20 $\dfrac{p-2}{p^2+6p+10}$.

21 $\dfrac{5}{p^2-3p+2}$.

22 $\dfrac{2p+1}{(p-1)p^2}$.

Практическое занятие 3 **Приложения операционного исчисления**

3.1 Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

3.2 Решение систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

3.3 Использование операционного исчисления в электротехнике

3.1 Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть имеется линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям Коши

$$y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

где c_0, $c_1, \ldots$, c_{n-1} – заданные числа, функция $y(t)$ вместе с ее рассматриваемыми производными и функция $f(t)$ являются оригиналами.

Для того чтобы найти решение $y(t)$ применим к обеим частям дифференциального уравнения преобразование Лапласа, т. е. от оригиналов $y(t)$ и $f(t)$ переходим к изображениям $Y(p)$ и $F(p)$ соответственно. В результате получается операторное уравнение:

$$a_0\left(p^n Y - p^{n-1}c_0 - p^{n-2}c_1 - \ldots - c_{n-1}\right) + a_1\left(p^{n-1}Y - p^{n-2}c_0 - \ldots - c_{n-2}\right) + \ldots +$$
$$+ a_{n-1}\left(pY - c_0\right) + a_n Y = F$$

Разрешая полученное операторное уравнение относительно $Y(p)$, находим

$$Y(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)},$$

где $Q_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$,

$$R_{n-1}(p)=c_0\left(a_0p^{n-1}+a_1p^{n-2}+...+a_{n-1}\right)+c_1\left(a_0p^{n-2}+a_1p^{n-3}+...+a_{n-2}\right)+$$
$$+...+c_{n-1}a_0\ .$$

Полученное решение называется *операторным решением* искомого дифференциального уравнения.

Определяя оригинал $y(t)$, соответствующий найденному изображению $Y(p)$, получается искомое решение .

Полученное решение $y(t)$ во многих случаях оказывается справедливым при всех $t\in \mathrm{R}$, а не только при $t\geq 0$.

При нулевых начальных условиях решение операторного уравнения примет вид $Y(p)=\dfrac{F(p)}{Q_n(p)}$.

Если $\tilde{y}(t)$ – решение дифференциального уравнения

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=1$$

при начальных условиях $y(0)=y'(0)=...=y^{(n-1)}(0)=0$, то решением уравнения $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=f(t)$ при тех начальных условиях является функция

$$y(t)=\int_0^t\tilde{y}'(\tau)\,f(t-\tau)d\tau\ .$$

Данная формула позволяет находить решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при нулевых начальных условиях, не находя изображения правой части.

3.2 Решение систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{gathered}y_1'+a_{11}y_1+...+a_{1n}y_n=f_1(t),\\ y_2'+a_{21}y_1+...+a_{2n}y_n=f_2(t),\\ ....\ ....\ ....\ ....\ ..,\\ y_n'+a_{n1}y_1+...+a_{nn}y_n=f_n(t),\end{gathered}$$

удовлетворяющая начальным условиям Коши

$$y_1(0)=c_1,\ y_2(0)=c_2,\ \dots,\ y_n(0)=c_n,$$

где c_0, $c_1,\dots$, c_n – заданные числа, функции $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_n(t)$ вместе с их первыми производными и функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$ являются оригиналами.

Пусть $y_k(t)\doteq Y_k(p)$, $f_k(t)\doteq F_k(p)$, $k=1,2,\dots,n$. Применяя преобразование Лапласа к каждому уравнению системы и учитывая правила дифференцирования оригинала, получим:

$$\begin{gathered}
pY_1-c_1+a_{11}Y_1+\dots+a_{1n}Y_n=F_1(t),\\
pY_2-c_2+a_{21}Y_1+\dots+a_{2n}Y_n=F_2(t),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
pY_n-c_n+a_{n1}Y_1+\dots+a_{nn}Y_n=F_n(t),
\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}
(p+a_{11})Y_1+a_{12}Y_2\dots+a_{1n}Y_n=c_1+F_1(t),\\
a_{21}Y_1+(p+a_{21})Y_1+\dots+a_{2n}Y_n=c_2+F_2(t),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ ,\\
a_{n1}Y_1+a_{n2}Y_2+\dots+(p+a_{nn})Y_n=c_n+F_n(t).
\end{gathered}$$

Данная система называется *системой операторных* уравнений.

Пусть

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}+p & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}+p & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+p \end{vmatrix}$$

есть определитель системы операторных уравнений и Δ_{km} – алгебраические дополнения элементов, находящихся на пересечении k-1 строки и m-го столбца. Если определитель $\Delta\neq 0$, то применяя правило Крамера, получим:

$$Y_k(p)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(F_i(p)+c_i)\Delta_{km}}{\Delta},\ k=1,2,\dots,n.$$

Для нахождения решения исходной системы определяются оригиналы, соответствующие полученным изображениям.

Если определитель $\Delta = 0$, то система операторных уравнений решения не имеет, следовательно, и исходная система не имеет решения.

При помощи операционного исчисления можно находить решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, уравнениями в частных производных, уравнений в конечных разностях, проводить суммирование рядов, вычислять интегралы. При этом решение этих и других задач значительно упрощается.

3.3 Использование операционного исчисления в электротехнике

Методы операционного исчисления широко используются в электротехнике при исследовании переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами r, L и C, поскольку явления, происходящие в таких цепях, описываются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями и их системами, которые легко решаются с помощью операционного исчисления.

Переходным процессом называется явление, наблюдающееся в цепи при переходе от одного установившегося режима к другому. Переходные процессы возникают в электрических цепях в результате коммутаций (включения или выключения э. д. с., различных переключений, короткого замыкания в цепи, внезапного изменения параметров в цепи и т. д.). Эти процессы в электрических цепях всегда являются *электромагнитными*. Они протекают обычно с очень большой скоростью и, как правило, заканчиваются по истечении долей секунды. При этом возможны случаи, когда напряжения и токи цепи или на отдельных ее элементах при переходном процессе значительно превосходят их значения в установившемся режиме. Последнее может привести к выходу из строя некоторых элементов цепи.

При протекании переходных процессов в электрических цепях всегда выполняются законы коммутации (законы переходных процессов):

а) ток в индуктивности L не может измениться скачком. В начальный момент (непосредственно после коммутации) он сохраняет то значение, которое было в момент, непосредственно предшествующий коммутации:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_L(0);$$

б) напряжение на емкости C не может измениться скачком. В начальный момент (непосредственно после коммутации) оно сохраняет то значение, которое было в момент, непосредственно предшествующий коммутации:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0).$$

Значения токов в индуктивностях и напряжений на обкладках конденсаторов в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации в цепи, $i_L(0)$ и $u_C(0)$, определяют начальные условия переходного процесса. При расчете переходного процесса в электрической цепи эти условия необходимо выявить до выполнения всех остальных вычислений. Если все $i_L(0)$ и $u_C(0)$ равны нулю, то в цепи имеют место нулевые начальные условия, а токи в индуктивностях и напряжения на конденсаторах в переходном процессе начнут изменяться от нулевых значений. При ненулевых начальных условиях для определения знаков $i_L(0)$ и $u_C(0)$ надо задаться направлениями обхода контуров цепи, в которых будет происходить переходный процесс. Положительные знаки $i_L(0)$ и $u_C(0)$ сохранятся, если их направления совпадают с направлением обхода контура. В противном случае знаки $i_L(0)$ и $u_C(0)$ изменятся на противоположные. Здесь токи в индуктивностях и напряжения на конденсаторах в переходном процессе начнут изменяться от тех значений, которые они имели в момент, непосредственно предшествующий коммутации (с учетом установленных знаков соответствующих величин).

Пусть в электрической цепи, изображенной на рисунке 3. 1, рубильник P переключается из положения 1 в положение 2. Тогда в контуре r, L и C возникнет переходный процесс. Примем, что его начальные условия ненулевые: $i_L(0) \neq 0$ и $u_C(0) \neq 0$. При направлениях тока в индуктивности и напряжения на обкладках конденсатора в начальный момент переходного процесса, показанных на рисунке 3. 1, выбранном направлении обхода контура имеем $i_L(0) > 0$ и $u_C(0) > 0$.

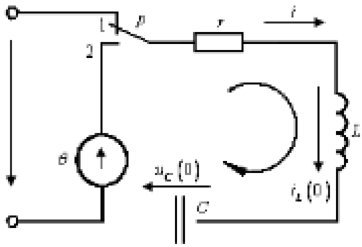

Рисунок 3. 1 – Электрическая цепь

Возьмем направление мгновенного значения тока переходного процесса $i = i(t)$, совпадающие с направлением обхода контура. Так как направление источника э. д. с. $e = e(t)$, действующего в контуре r, L и C во время переходного процесса, совпадает с направлением обхода этого контура, то по второму закону Кирхгофа получаем уравнение:

$$ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t idt + u_C(0) = e.$$

Обозначим $i(p) = i \doteq I(p)$ – изображение тока переходного процесса в контуре; $e(p) = e \doteq E(p)$ – изображение внешней э. д. с., действующей в контуре.

Тогда уравнение цепи r, L и C в операторной форме примет вид:

$$rI(p) + L(pI(p) - i_L(0)) + \frac{1}{pC}I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = E(p).$$

Это уравнение можно записать так:

$$\left(r + Lp + \frac{1}{pC}\right)I(p) = E(p) + Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{p}.$$

Откуда находится выражение для изображения тока переходного процесса в виде:

$$I(p) = \frac{E(p) + Li_L(0) - \dfrac{u_C(0)}{p}}{r + Lp + \dfrac{1}{pC}}.$$

Полученная зависимость представляет собой закон Ома в операторной форме. Его можно записать так:

$$I(p) = \frac{F(p)}{Z(p)},$$

где $F(p) = E(p) + Li_L(0) - \dfrac{u_C(0)}{p}$ – изображение всех (внешних и внутренних) э. д. с., действующих в контуре; $Z(p) = r + Lp + \dfrac{1}{pC}$ – операторное сопротивление контура r, L и C; $-\dfrac{u_C(0)}{p}$ – изображение начальной э. д. с. емкости (включая знак «минус»), уравновешивающей начальное напряжение на обкладках конденсатора и направленной навстречу $u_C(0)$.

Операторное сопротивление $Z(p) = r + Lp + \dfrac{1}{pC}$ контура r, L и C получено из выражения комплекса полного сопротивления этого контура

$$Z = r + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$$

путем замены $i\omega$ на p, $i^2 = -1$.

Закон Ома в операторной форме позволяет, непосредственно исследовать переходные процессы только в неразветвленных электрических цепях. При рассмотрении переходных процессов в разветвленных и сложных электрических цепях необходимо использовать первый и второй законы Кирхгофа, которые имеют в операторной форме следующий вид:

первый закон – $\sum_{k=1}^{n} I_k(p) = 0$;

второй закон – $\sum_{k=1}^{m} Z_k(p) I_k(p) = \sum_{k=1}^{l} F_k(p)$.

При составлении уравнений цепи по этим законам «правила знаков» остаются такими же, как и при расчете установившихся режимов в электрических цепях постоянного и переменного тока. В частности, если мгновенное значение тока переходного процесса $i_n(t)$ протекающего в ветви n, принято направленным к заданному узлу (для которого составляется уравнение по первому закону Кирхгофа), то изображение этого тока $I_n(p)$ берется с одним знаком (например, со знаком «плюс»). Если же ток $i_m(p)$ направлен от узла, то его изображение $I_m(p)$ берется с другим знаком (со знаком «минус»).

Составляя уравнения по второму закону Кирхгофа, необходимо учитывать, что кроме внешних э. д. с. $e_k(t) = e_k$ в контурах, содержащих индуктивности и емкости при ненулевых начальных условиях, действуют еще и внутренние э. д. с. (начальные э. д. с.: самоиндукции и емкости). Причем, если направление $i_{L_k}(0)$ совпадает с направлением обхода контура, то слагаемое $L_k i_{L_k}(0)$ следует брать со знаком «плюс», если же и $u_{C_k}(0)$ направлено по обходу контура, то результирующий знак слагаемого $\frac{u_{C_k}(0)}{p}$ должен быть «минус», так как начальная э. д. с. емкости всегда направлена навстречу начальному напряжению на обкладках конденсатора $u_C(0)$.

Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме имеют тот же вид, что и при установившихся режимах в цепях постоянного и переменного тока. Поэтому, применяя операционное исчисление для расчета переходных процессов, в принципе можно использовать все методы расчета сложных линейных электрических цепей с постоянными параметрами. При исследовании переходных процессов в сложных и разветвленных электрических цепях (в последнем случае при ненулевых начальных условиях) наибольшее применение получили метод уравнений Кирхгофа, метод контурных токов и метод наложения. При расчете переходных процессов в неразветвленных цепях, также в простых разветвленных цепях при нулевых начальных условиях применяется закон Ома в операторной форме. При этом в разветвленной цепи непосредственно определяется только ток переходного режима в ветви, содержащей источник э. д. с. (вся цепь нереально сводится к простой неразветвленной цепи).

Во всех случаях расчета переходных процессов в электрических цепях операторным методом сохраняется такая последовательность операций: сначала определяются начальные условия, затем записывается уравнение или система уравнений для заданной цепи в операторной форме, что позволяет найти изображения искомых токов или напряжений. По полученным изображениям отыскиваются оригиналы – мгновенные значения токов или напряжений переходного режима.

Вопросы для самоконтроля

1 Как используется преобразование Лапласа при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?

2 Как используется преобразование Лапласа при решении систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?

3 При исследовании каких процессов используется операционное исчисление в электротехнике?

Решение типовых примеров

1 Решить уравнение $x'' + 4x = t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$.

Решение. Пусть $x(t) \doteq X(p)$.

По свойству дифференцирования оригинала

$$x''(t) \doteq p^2 X(p) - px_0 - x_1;\ \ f(t) \doteq t = \frac{1}{p^2}.$$

В результате приходим к алгебраическому уравнению:

$$p^2 X(p) - px_0 - x_1 + 4X(p) = \frac{1}{p^2}$$

Отсюда получаем:

$$X(p) = \frac{1}{p^2(p^2+4)} + \frac{px_0}{p^2+4} + \frac{x_1}{p^2+4}$$

Разложив изображение $X(p)$ на простейшие дроби и используя таблицу изображений, находим решение задачи Коши:

$$X(p) = \frac{1}{4p^2} - \frac{1}{4(p^2+4)} + \frac{px_0}{p^2+4} + \frac{x_1}{p^2+4} \doteq$$

$$\doteq x(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t + x_0 \cos 2t + \frac{x_1}{2}\sin 2t.$$

2 Решить уравнение $y''' - y'' - 6y' = 0$ удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 15$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 56$.

Решение. Пусть $y(t) \doteq Y(p)$. Тогда

$$y'(t) \doteq p \cdot Y(p) - y(0) = pY(p) - 15,$$

$$y''(t) \doteq p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 15p - 2,$$

$$y'''(t) \doteq p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot y(0) - p \cdot y'(0) - y''(0) =$$

$$= p^3 F(p) - 15p^2 - 2p - 56.$$

Подставляя в дифференциальное уравнение и преобразовывая, получим:

$$Y(p) = \frac{15(p^2 - p - 6) + 2(p-1) + 56}{p^3 - p^2 - 6p} = \frac{15p^2 - 13p - 36}{p(p+2)(p-3)} =$$

$$= \frac{6}{p} + \frac{5}{p+2} + \frac{4}{p-3}.$$

По таблице оригиналов находим:

$$\frac{1}{p} \doteq 1, \ \frac{1}{p+2} \doteq e^{-2t}, \ \frac{1}{p-3} \doteq e^{3t}.$$

Тогда получаем:

$$y(t) = 6 + 5\mathrm{e}^{-2t} + 4\mathrm{e}^{3t}.$$

3 Решить задачу Коши

$$x'' + 4x = f(t),$$

$$x(0) = x'(0) = 0,$$

где

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } \ t < 0, \\ 2t, & \text{при } \ 0 \le t \le 1, \\ 4 - 2t, & \text{при } \ 1 \le t \le 2, \\ 0, & \text{при } \ t > 2. \end{cases}$$

Решение. С помощью единичной функции Хевисайда запишем $f(t)$ одним аналитическим выражением:

$$f(t) = 2t\eta(t) - 2t\eta(t-1) + (4-2t)\eta(t-1) - (4-2t)\eta(t-2) =$$
$$= 2t\eta(t) - 4(t-1)\eta(t-1) + 2(t-2)\eta(t-2).$$

Применяя формулу

$$f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau} F(p),$$

получим

$$f(t) \doteq \frac{2}{p^2} - \frac{4}{p^2}e^{-p} + \frac{2}{p^2}e^{-2p} = \frac{2}{p^2}\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right).$$

Полагая $x(t) \doteq X(p)$ и учитывая начальные условия, получим

$$x''(t) \doteq p^2 X(p)$$

Операторное уравнение имеет вид

$$p^2 X(p) + 4X(p) = \frac{2}{p^2}\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right).$$

Откуда

$$X(p) = \frac{2\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right)}{p^2\left(p^2+4\right)} = \left(\frac{1}{2p^2} - \frac{1}{2\left(p^2+4\right)}\right)\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right).$$

Итак,

$$X(p)=\frac{1}{2p^2}-\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{e^{-2p}}{2p^2}-\frac{1}{2(p^2+4)}+\frac{e^{-p}}{p^2+4}-\frac{e^{-2p}}{2(p^2+4)}\doteq$$

$$\doteq\frac{1}{2}t\eta(t)-(t-1)\eta(t-1)+\frac{1}{2}(t-2)\eta(t-2)-\frac{1}{4}\sin 2t\eta(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\sin 2(t-1)\eta(t-1)-\frac{1}{4}\sin 2(t-2)\eta(t-2).$$

Преобразуя, получим:

$$x(t)=\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right)\eta(t)+\left(\frac{\sin 2(t-1)}{2}-(t-1)\right)\eta(t-1)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}(t-2)-\frac{\sin 2(t-1)}{4}\right)\eta(t-2).$$

4 Решить задачу Коши

$$x''(t)+x'(t)=t,$$

$$x(1)=1,\ x'(1)=0.$$

Решение. Положим $t=\tau+1$. Тогда $x(t)=x(\tau+1)=\tilde{x}(\tau)$. Значит,

$$\tilde{x}''(\tau)+\tilde{x}'(\tau)=\tau+1,$$

$$\tilde{x}(0)=1,\ \tilde{x}'(0)=0,$$

так как значению $t=1$ отвечает значение $\tau=0$.

Пусть $\tilde{x}(\tau)\doteq X(p)$.

Тогда

$$\tilde{x}'(\tau)=pX(p)-1,$$

$$\tilde{x}''(\tau)=p^2X(p)-p,$$

и операторное уравнение примет вид:

$$p^2X(p)-p+pX(p)-1=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}.$$

Решая уравнение, находим $X(p)$

$$X(p)=\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p}=\frac{\tau^2}{2}+1\doteq\tilde{x}(\tau)$$

Заменив τ на $t-1$, получим решение $x(t)$ исходной задачи Коши

$$x(t)=\frac{(t-1)^2}{2}+1.$$

5 Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'-2y-4z=\cos t, \\ z'+y+2z=\sin t, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$ и $z(0)=0$.

Решение. Пусть $y(t)\doteq Y(p)$ и $z(t)\doteq Z(p)$. Применяя преобразование Лапласа к данной системе, получим систему операторных уравнений

$$\begin{cases} (-2+p)Y-4Z=\dfrac{p}{p^2+1}, \\ Y+(2+p)Z=\dfrac{1}{p^2+1}. \end{cases}$$

Определитель данной системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2+p & -4 \\ 1 & 2+p \end{vmatrix}=p^2.$$

Тогда решение относительно изображений есть

$$Y(p)=\frac{p^2+2p+4}{p^2\left(p^2+1\right)}=\frac{4}{p^2}+\frac{2}{p}-\frac{2p+3}{p^2+1},$$

$$Z(p)=-\frac{2}{p^2\left(p^2+1\right)}=-\frac{2}{p^2}+\frac{2}{p^2+1}.$$

Переходя от найденных изображений к оригиналам, при $t>0$ получим:

$$y(t)=4t+2-2\cos t-3\sin t,$$

$$z(t)=-2t+2\sin t.$$

6 Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'-2x-3y=3e^{2t}, \\ y'+3x-2y=0, \end{cases}$$

удовлетворяющую начальным условиям $x(0)=0$, $y(0)=1$

Решение. Пусть $x(t)\doteq X(p)$, $y(t)\doteq Y(p)$. Тогда

$$x'(t)\doteq pX(p),$$
$$y'(t)\doteq pY(p)-1,$$
$$e^{2t}\doteq\frac{1}{p-2}.$$

Переход к уравнениям в изображениях дает систему операторных уравнений

$$\begin{cases} pX(p)-2X(p)-3Y(p)=\dfrac{3}{p-2}, \\ pY(p)+3X(p)-2Y(p)=1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} X(p)(p-2)-3Y(p)=\dfrac{3}{p-2}, \\ Y(p)(p-2)+3X(p)=1. \end{cases}$$

Решаем систему по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p-2 & -3 \\ 3 & p-2 \end{vmatrix}=(p-2)^2+9,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} \dfrac{3}{p-2} & -3 \\ 1 & p-2 \end{vmatrix}=3+3=6,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} p-2 & \dfrac{3}{p-2} \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=p-2-\frac{9}{p-2}=\frac{(p-2)^2-9}{p-2}.$$

Тогда

$$X(p)=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{6}{(p-2)^2+9}\doteq 2e^{2t}\sin 3t;$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{(p-2)^2-9}{(p-2)\left((p-2)^2-9\right)}=\frac{2(p-2)}{(p-2)^2+9}-\frac{1}{p-2}\doteq$$

$$\doteq 2e^{2t}\cos 3t-e^{2t}.$$

Итак, решение системы

$$\begin{cases} x=2e^{2t}\sin 3t, \\ y=e^{2t}(2\cos 3t-1). \end{cases}$$

7 Решить дифференциальное уравнение $x''-x=\dfrac{1}{e^t+2}$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=x'(0)=0$.

Решение. Рассмотрим вспомогательное уравнение $\tilde{x}''-\tilde{x}=1$, удовлетворяющее начальным условиям $\tilde{x}(0)=\tilde{x}'(0)=0$.

Применяя операционный метод, находим изображение:

$$\tilde{X}(p)=\frac{1}{p(p^2-1)}$$

и соответствующий ему оригинал $\tilde{x}(t)=\int\limits_0^t \operatorname{sh}\tau\,d\tau=\operatorname{ch}t-1$.

Тогда решение исходного дифференциального уравнения есть:

$$x(t)=\int\limits_0^t \frac{1}{1+e^{\tau}}\operatorname{sh}(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}\left(e^t-te^t-1\right)+\operatorname{sh}t\ln\frac{1+e^t}{2}.$$

8 Найти переходные значения тока и напряжений (i,u_r,u_C) в цепи, изображенной на рисунке 3. 2, при переключении рубильника P из положения 1 в положение 2, если $U=100$ В, $r=100$ Ом, $C=10$ мкФ.

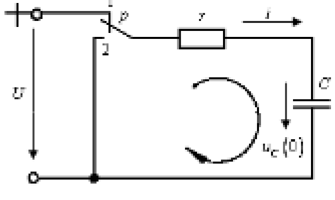

Рисунок 3. 2 – Электрическая цепь к типовому примеру 7

Решение. Будем считать, что до переключения рубильника из положения 1 в положение 2 конденсатор C был заряжен до напряжения источника U. Если обход контура взять совпадающим с ходом стрелки часов, то начальное напряжение на конденсаторе $u_C(0)$ считается положительным: $u_C(0)=U=100$ В. Операторное сопротивление контура

$$Z(p)=r+\frac{1}{pC}.$$

Внешних источников э. д. с. в контуре нет.

Изображение внутренней э. д. с. (начальной э. д. с. емкости) есть

$$\frac{-u_C(0)}{p}=\frac{-U}{p}=F(p).$$

По закону Ома в операторной форме имеем

$$I(p)=\frac{F(p)}{Z(p)}=\frac{\dfrac{-U}{p}}{r+\dfrac{1}{pC}}=\frac{-UC}{rCp+1}.$$

Изображение тока переходного процесса удовлетворяет условиям применения второй теоремы разложения. Поэтому можно записать

$$I(p)=\frac{-UC}{rCp+1}=\frac{P(p)}{Q(p)},$$

где $P(p)=-UC=-100\cdot 10\cdot 10^{-6}=-10^{-3}$,

$Q(p)=rCp+1$,

$\alpha_1=-\dfrac{1}{rC}=-\dfrac{1}{100\cdot 10\cdot 10^{-6}}=-10^{3}$,

$P(\alpha_1)=-10^{-3}$,

$Q'(p)=rC=100\cdot 10\cdot 10^{-6}=10^{-3}$,

$Q^{'}(\alpha_1) = 10^{-3}$.

В результате получаем мгновенное значение тока переходного процесса в виде:

$$i = i(t) = \frac{P(\alpha_1)}{Q^{'}(\alpha_1)} e^{\alpha_1 t} = \frac{-10^{-3}}{10^{-3}} e^{-10^3 t} = -e^{-1000\,t} \text{ А.}$$

Отрицательный знак тока означает, что при разряде конденсатора C через явное сопротивление r ток $i(t)$ направлен в сторону, противоположную направлению обхода контура, выбранного раньше. Мгновенное значение напряжения на активном сопротивлении в переходном процессе также отрицательно:

$$u_r = ri = -100e^{1000\,t} \text{ В.}$$

Мгновенное значение переходного напряжения на конденсаторе, определяемое по второму закону Кирхгофа $u_C + ri = 0$ есть

$$u_C = -ri = -u_r = 100e^{-1000\,t} \text{ В.}$$

Характер изменения i и u_C в переходном режиме показан на рисунке 3. 3.

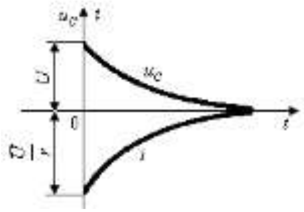

Рисунок 3. 3 – Характер изменения i и u_C
в переходном режиме

Задания для аудиторной работы

1 Решить задачи Коши:

1) $x' + x = e^{-t}$,
$x(0) = 1$;

2) $x' + 2x = \sin t$,
$x(0) = 0$;

3) $x'' + x' = 1$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

4) $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

5) $x'' - 2x' + 2x = 1$,
$x(0) = x'(0) = 0$;

6) $x'' + x' = \cos t$,
$x(0) = 2$, $x'' + x' = 0$;

7) $x''' + x' = 1$,
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;

8) $x''' - x'' = \sin t$,
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;

9) $x''' + x' = e^{t}$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = 2$,

11) $x'' + x' = 4\sin^2 t$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;

12) $x^4 - x'' = \cos t$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = -1$,
$x''(0) = x'''(0) = 0$;

13) $x''(t) + x'(t) = 2t$,
$x(1) = 1$, $x'(1) = -1$;

14) $x''(t) + x(t) = -2\sin t$,
$x(\pi/2) = 0$, $x'(\pi/2) = 1$;

15) $x' - 2x = 1$,
$x(0) = 14$

16) $x'' + x' = e^{-t}$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;

17) $x' + 3x = t^2$,
$x(0) = 0$;

18) $x'' + 4x = f(t)$,
$x(0) = x'(0) = 0$,
$f(t)$ изображена на рисунке 3. 4;

19) $x'' + x = f(t)$,
$x(0) = x'(0) = 0$,

$x''(0) = 0$;

10) $x'' - 2x' = e^{2t}$,
$x(0) = x'(0) = 0$;

$f(t)$ изображена на рисунке 3. 5;

20) $x'' - x = \dfrac{1}{e^t + 2}$,
$x(0) = x'(0) = 0$.

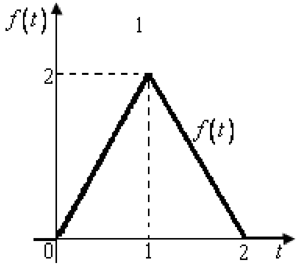

Рисунок 3. 4 – График $f(t)$ для задачи 1 (18) аудиторной работы

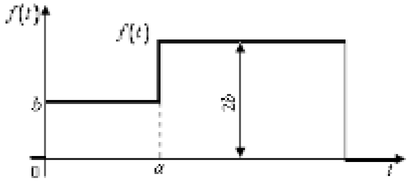

Рисунок 3. 5 – График $f(t)$ для задачи 1 (19) аудиторной работы

2 Решить системы уравнений с заданными начальными условиями:

1) $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases}$
$x(0) = 1$, $y(0) = -1$;

2) $\begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^t, \end{cases}$
$x(0) = y(0) = 1$;

3) $\begin{cases} y' + z = 2\sin t, \\ z' + y = -1, \end{cases}$
$y(0) = 0$, $z(0) = 1$;

8) $\begin{cases} y' - 4z = 4t, \\ z' - y = 5\cos t, \end{cases}$
$y(0) = 2$, $z(0) = 0$;

9) $\begin{cases} y' + 9z = 3e^t, \\ z' + y = 8\operatorname{sh} t, \end{cases}$
$y(0) = 0$, $z(0) = 2$;

10) $\begin{cases} y' + 9z = 3e^t, \\ z' + y = 8\operatorname{sh} t, \end{cases}$
$y(0) = 0$, $z(0) = 2$;

4) $\begin{cases} y' + y - 3z = 2, \\ z' - y - z = 5\cos t, \end{cases}$,
$y(0)=1,\ z(0)=0$;

5) $\begin{cases} y' - y + z = \operatorname{sh} t, \\ z' + y + z = t, \end{cases}$
$y(0)=0,\ z(0)=-1$;

6) $\begin{cases} y' - y + 3z = 4\sin 2t, \\ z' + y + z = 4t, \end{cases}$
$y(0)=1,\ z(0)=-1$;

7) $\begin{cases} y' + y - z = t^2, \\ z' - y - z = \operatorname{ch} t, \end{cases}$
$y(0)=-1,\ z(0)=1$;

11) $\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases}$
$x(0)=y(0)=x'(0)=0$;

12) $\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ -x' + x + y'' - 5y' + 4y = 0, \end{cases}$,
$x(0)=x'(0)=y'(0)=0$;
$y(0)=1$;

13) $\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y, \end{cases}$
$x(0)=-1$,
$y(0)=0$,
$z(0)=1$.

3 Частица массы m движется прямолинейно под действием восстанавливающей силы $m\lambda x$ пропорциональной смещению, и силы сопротивления $2m\mu v$, пропорциональной скорости. В момент времени $t=0$ частица находится на расстоянии x_0, от положения равновесия и обладает скоростью v_0. Показать, что если имеет место равенство $n^2 = \lambda^2 - \mu^2$, то смещение частицы определяется выражением $\frac{1}{n} e^{-\mu t}\left(n x_0 \cos nt + \left(v_0 + \mu x_0\right)\sin nt\right)$.

4 Для электрической цепи (рисунок 3. 6) определить напряжение на элементе L_1 цепи при подключении постоянной э. д. с. $e(t)=E$ (в случае необходимости положить $u_C(0)=0$.

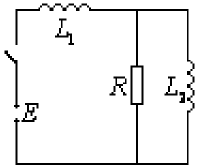

Рисунок 3. 6 – Электрическая цепь
к задаче 4 аудиторной работы

Задания для домашней работы

1 Решить задачи Коши:

1) $x' - x = 1$,
$x(0) = -1$;

2) $x'' + 2x' = t\sin t$,
$x(0) = x'(0) = 0$;

3) $x'' + 2x' + x = \sin t$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;

4) $x'' - 2x' + x = e^t$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

5) $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$,
$x(0) = x'(0) = 0$;

6) $x'' - x' = te^t$,
$x(0) = x'(0) = 0$;

7) $x' - x = e^t$, $x(0) = 2$;

8) $x'' - x = \sin t$,
$x(0) = -1$, $x'(0) = 0$;

9) $x'' - 2x' + x = t - \sin t$,

13) $x''' - 2x'' + x' = 4$,
$x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = -2$;

14) $x''' + x = 0{,}5t^2e^t$,
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;

15) $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1$,
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;

16) $x''' + x' = t$,
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;

17) $x'' - x' = t^2$,
$x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

18) $x''' + x'' = \sin t$,
$x(0) = x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$;

19) $x' + 2x = e^{2t}$, $x(0) = -1$;

20) $x'' + 4x = t$,
$x(0) = 1$, $x'(0) = 0$;

21) $x'' - x' + x = e^{-t}$,

$x(0)=x'(0)=0$;

10) $x''' + x' = t$,
$x(0)=0$, $x'(0)=-1$, $x''(0)=0$;

11) $x'' - x' = -2t$,
$x(0)=8$, $x'(0)=6$;

12) $x'' + 9x = f(t)$,
$x(0)=0$, $x'(0)=1$,
$f(x)$ изображена на рисунке 3. 7

$x(0)=0$, $x'(0)=1$;

22) $x^4 + 2x'' + x = t\sin t$,
$x(0)=x'(0)=0$,
$x''(0)=x'''(0)=0$;

23) $x'' - x' = \dfrac{1}{e^t + 3}$,
$x''(0)=x'(0)=x(0)=0$;

24) $x'' + 3x' = e^t$,
$x(0)=0$, $x'(0)=-1$.

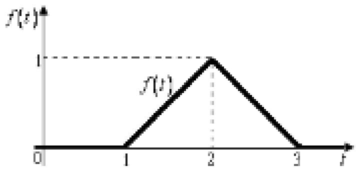

Рисунок 3. 7 – К задаче 1 (12) домашней работы

2 Решить системы уравнений с заданными начальными условиями:

1) $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases}$
$x(0)=y(0)=1$;

2) $\begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t}, \\ y' - 2x + y = 7e^{2t}, \end{cases}$
$x(0)=1$, $y(0)=3$;

3) $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - y = t, \end{cases}$

7) $\begin{cases} y' - z = t^3, \\ z' + y = 3\sin 2t, \end{cases}$
$y(0)=-2$, $z(0)=0$;

8) $\begin{cases} y' - 9z = 8\,\mathrm{ch}\,t, \\ z' - y = e^{-2t}, \end{cases}$
$y(0)=2$, $z(0)=0$;

9) $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, \\ x' + 4y' + 3y = 0, \end{cases}$

$x(0)=2$, $y(0)=4$; $\qquad$ $x(0)=y(0)=0$;

4) $\begin{cases} y'-2y-4z=\cos t, \\ z'+y+2z=\sin t, \end{cases}$
$y(0)=1$, $z(0)=-1$;

10) $\begin{cases} 2x''-x'+9x-y''-y'-3y=0, \\ x''+2y'+x=0, \end{cases}$,
$x(0)=x'(0)=1$, $y(0)=y'(0)=0$;

5) $\begin{cases} x'+y=e^{t}, \\ x+y'=e^{-t}, \end{cases}$
$x(0)=1$, $y(0)=-1$;

11) $\begin{cases} x'+y'-y=e^{t}, \\ 2x'+y'+2y=\cos t, \end{cases}$,
$x(0)=y(0)=0$;

6) $\begin{cases} x'=3y-x, \\ y'=y+x+e^{3t}, \end{cases}$
$x(0)=1$, $y(0)=1$;

12) $\begin{cases} x'=y+z, \\ y'=3x+z, \\ z'=3x+y, \end{cases}$
$x(0)=0$, $y(0)=1$, $z(0)=1$.

3 Материальная точка массы 2 грамма движется прямолинейно под действием силы F, возрастающей на a Н в секунду. В начальный момент точка находилась в начале координат и имела скорость $v_0=10$ см/с. Зная, что начальная величина силы F_0=4 Н и что на расстоянии 450 см от начала координат скорость $v=105$ см/с, определить значение величины a.

4 Для электрической цепи (рисунок 3. 8) определить напряжение на элементе L цепи при подключении постоянной э. д. с. $e(t)=E$ (в случае необходимости положить $u_C(0)=0$).

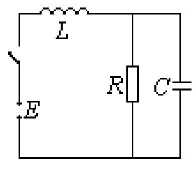

Рисунок 3. 8 – Электрическая цепь к задаче 4 домашней работы

Индивидуальные домашние задания

ИДЗ-1 Аналитические функции комплексной переменной

1 Проверить, являются ли аналитическими функции:

1.1 $f(z) = z \cdot \cos z$.

1.2 $f(z) = \overline{z} \cdot e^{z}$.

1.3 $f(z) = z \cdot \ln z$.

1.4 $f(z) = z + \sin z$.

1.5 $f(z) = e^{z} \cdot \operatorname{Re} z$.

1.6 $f(z) = z \cdot \operatorname{Im} z$.

1.7 $f(z) = \overline{z} \cdot \sin z$.

1.8 $f(z) = (\overline{z})^2 + z$.

1.9 $f(z) = e^{\overline{z}} - 1$.

1.10 $f(z) = e^{z} + z^2$.

1.11 $f(z) = z \cdot \overline{z} + e^{z}$.

1.12 $f(z) = \cos z \cdot \operatorname{Re} z$.

1.13 $f(z) = \ln z + \overline{z}$.

1.14 $f(z) = \ln \overline{z} - e^{z}$.

1.15 $f(z) = z \cdot \overline{z} - \dfrac{\overline{z}}{z}$.

1.16 $f(z) = \dfrac{z}{\overline{z}}$.

1.17 $f(z) = z - \operatorname{ch} \overline{z}$.

1.18 $f(z) = \sin \overline{z}$.

1.19 $f(z) = \operatorname{Re} e^{z} + \operatorname{Im} z$.

1.20 $f(z) = \operatorname{sh} z - z$.

1.21 $f(z) = 2^{z^2}$.

1.22 $f(z) = 3^{z} \cdot \operatorname{Im} z$.

1.23 $f(z) = \overline{z} \cdot \operatorname{Im} e^{2z}$.

1.24 $f(z) = \ln z^2$.

1.25 $f(z) = e^{z} + e^{\overline{z}}$.

1.26 $f(z) = \ln \overline{z} + z$.

1.27 $f(z) = 3^{z}$.

1.28 $f(z) = \ln z + e^{2z}$.

1.29 $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{z} - z$.

1.30 $f(z) = z^{\frac{1}{2}} + \overline{z}$.

2 Найти аналитические функции f по заданной действительной $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ части (предварительно проверив, что функция может быть действительной или мнимой частью аналитической функции):

2.1 $u(x,y) = e^{x} \cdot \sin y$.

2.2 $v(x,y) = e^{-2y} \cdot \cos x$.

2.3 $u(x,y)=e^{x+1}\cdot\cos y$.

2.4 $v(x,y)=\sin 2y\cdot\cos 2x$.

2.5 $v(x,y)=x^2-y^2+2x+1$.

2.6 $v(x,y)=\left(y+1\right)^2-x^2$.

2.7 $u(x,y)=x^3+3x\cdot y^2$.

2.8 $u(x,y)=x^2-\left(y+1\right)^2$.

2.9 $v(x,y)=3x^2\cdot y-3y^2-2y$.

2.10 $u(x,y)=2x\cdot\left(y+1\right)$.

2.11 $v(x,y)=9x^2\cdot y-3y^3$.

2.12 $v(x,y)=2x\cdot y+y$.

2.13 $v(x,y)=-\sin 2y\cdot\sin(2x-1)$.

2.14 $u(x,y)=\sin 2x\cdot\cos 2y$.

2.15 $v(x,y)=x^3-3x\cdot y^2$.

2.16 $v(x,y)=3x^2\cdot y-y^3$.

2.17 $v(x,y)=-e^{-2y}\cdot\cos 2x+x$.

2.18 $u(x,y)=x^2+y^2+x\cdot y$.

2.19 $v(x,y)=y+x\cdot y^2$.

2.20 $u(x,y)=2x^2-y^2+x$.

2.21 $u(x,y)=\ln\left(2x^2+y^2\right)$.

2.22 $v(x,y)=x^2-y^2-1$.

2.23 $u(x,y)=-y\cdot\left(4x+1\right)$.

2.24 $v(x,y)=y-e^{2x}\cdot\sin 2y$.

2.25 $v(x,y)=-\dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+y^2\right)$.

2.26 $v(x,y)=e^{x^2-y^2}\cdot\sin 2xy$.

2.27 $u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cdot\cos 2xy$.

2.28 $u(x,y)=x^2-y^2-x$.

2.29 $v(x,y)=x+y$.

2.30 $v(x,y)=\sin x\cdot\operatorname{sh} y$.

3 Вычислить интегралы (в интегралах по замкнутому контуру контур обходит против часовой стрелки):

3.1 $\displaystyle\oint\limits_{\substack{|z|=1\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} z\cdot\operatorname{Re} z\,dz$.

3.2 $\displaystyle\oint\limits_{\substack{|z|=1\\ -\pi\le\varphi\le\pi}} \operatorname{Re} z^2\,dz$.

3.3 $\displaystyle\oint\limits_{\substack{|z|=1\\ 0\le\varphi\le\pi}} z^2\cdot\operatorname{Im} z\,dz$.

3.4 $\displaystyle\oint\limits_{\substack{|z|=2\\ -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}}} (z^2-z)\,dz$.

3.5 $\displaystyle\oint\limits_{\substack{|z|=2\\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}} (z-\overline{z}^2)\,dz$.

3.6 $\displaystyle\int\limits_{\substack{y=x^2\\ z_1=0\\ z_2=1+i}} z\cdot\operatorname{Im} z\,dz$.

3.7 $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \overline{z}\cdot e^z\,dz$.

3.8 $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z\cdot e^{|z|^2}\,dz$.

3.9 $\int\limits_{\substack{|z|=1\\0\le\varphi\le\pi}} \overline{z}\cdot\operatorname{Im} z\,dz$.

3.10 $\int\limits_{\substack{|z|=1\\0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}} \operatorname{Im} 2z\,dz$.

3.11 $\int\limits_{\substack{y=x\\z_1=0\\z_2=1+i}} \left(z^2+\overline{z}\right)dz$.

3.12 $\int\limits_{\substack{|z|=1\\0\le\varphi\le2\pi}} z\cdot\operatorname{Im} z\,dz$.

3.13 $\int\limits_{\substack{|z|=2\\-\pi\le\varphi\le\pi}} z\cdot\operatorname{Re} z\,dz$.

3.14 $\int\limits_{\substack{|z|=2\\0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}} \operatorname{Im} z^2\,dz$.

3.15 $\int\limits_{\substack{|z|=2\\0\le\varphi\le2\pi}} z\cdot\operatorname{Re} z^2\,dz$.

3.16 $\int\limits_{\substack{y=x\\z_1=0\\z_2=1+i}} \left(1+2\overline{z}\right)dz$.

3.17 $\int\limits_{\substack{y=x\\z_1=0\\z_2=1+i}} z^2\cdot\operatorname{Im} z\,dz$.

3.18 $\int\limits_{|z|=3} z\cdot\operatorname{Im} z^2\,dz$.

3.19 $\int\limits_{\substack{y=x\\z_1=0\\z_2=1+i}} z^2\cdot\operatorname{Re} z\,dz$.

3.20 $\int\limits_{\substack{y=x\\z_1=0\\z_2=1+i}} \left(\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z\right)dz$.

3.21 $\int\limits_{\substack{|z|=1\\0\le\varphi\le2\pi}} \left(\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z\right)dz$.

3.22 $\int\limits_{\substack{|z|=1\\-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}} \left(z-\overline{z}\right)dz$.

3.23 $\int\limits_{\substack{|z|=1\\0\le\varphi\le\pi}} \operatorname{Re} z\,dz$.

3.24 $\int\limits_{\substack{|z|=1\\0\le\varphi\le\pi}} \operatorname{Im} z\,dz$.

3.25 $\int\limits_{\substack{y=x\\z_1=0\\z_2=1+i}} \overline{z}\,dz$.

3.26 $\int\limits_{\substack{|z|=1\\-\pi\le\varphi\le\pi}} \overline{z}\,dz$.

3.27 $\int\limits_{\substack{|z|=1\\0\le\varphi\le\pi}} z\cdot\overline{z}\,dz$.

3.28 $\int\limits_{\substack{|z|=1\\0\le\varphi\le2\pi}} \left(\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z^2\right)dz$.

3.29 $\int\limits_{\substack{y=-x \\ z_1=1-i \\ z_2=0}} z\cdot\bar{z}dz$.

3.30 $\int\limits_{\substack{y=x+1 \\ z_1=i \\ z_2=1+i}} \left(1+3i-z^2\right)dz$.

4 Вычислить интегралы по замкнутому контуру с помощью интегральной формулы Коши (контур обходится против часовой стрелки), сделать чертеж:

4.1 $\int\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{ch} iz\,dz}{(z-1)^2\cdot(z-i)}$.

4.2 $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2\cdot(z-2)}dz$.

4.3 $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^{i\cdot z}}{(z+2)^2\cdot z}dz$.

4.4 $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin\pi z\,dz}{(z-1)\cdot(z+1)^2}$.

4.5 $\int\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z-3i)\cdot(z+1)^2}$.

4.6 $\int\limits_{|z|=5} \frac{dz}{(z+4i)(z-2)^2}$.

4.7 $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{z^2}}{(z-1)\cdot z^2}dz$.

4.8 $\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos z\,dz}{(z-i)^2(z-2)}$.

4.9 $\int\limits_{|z|=4} \frac{\sin z\,dz}{(z+2)^2\cdot(z-1)}$.

4.10 $\int\limits_{|z|=2} \frac{\pi\cdot z\,dz}{(z-1)^2(z-i)}$.

4.11 $\int\limits_{|z|=5} \frac{\cos^2 z\,dz}{(z-4)^2(z+1)}$.

4.12 $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{i\cdot z^2}}{z^2\cdot(z-i)}dz$.

4.13 $\int\limits_{|z|=4} \frac{\cos 2z\,dz}{(z+2)(z-2)^2}$.

4.14 $\int\limits_{|z|=2} \frac{(z+2i)dz}{(z-1)(z+1)^2}$.

4.15 $\int\limits_{|z|=3} \frac{\operatorname{th}\pi z\,dz}{(z+1)(z-2)^2}$.

4.16 $\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin\pi z\,dz}{(z-2)\cdot(z-1)^2}$.

4.17 $\int\limits_{|z|=3} \frac{\sin z dz}{(z-1)^2(z+2)}$.

4.18 $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^2\,dz}{(z+i)^2(z-1)}$.

4.19 $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos 2z}{z^2 \cdot (z+2)} dz$.

4.20 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin 2z\, dz}{(z-1)^2 \cdot (z+i)}$.

4.21 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{tg} z}{z \cdot (z+i)^2} dz$.

4.22 $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \cdot z}{z^2 \cdot (z-2)} dz$.

4.23 $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z}{z^2 \cdot (z+2)} dz$.

4.24 $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z \cdot \operatorname{sh} z\, dz}{(z+i) \cdot (z-2)^2}$.

4.25 $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{i \cdot z}}{z^2 \cdot (z+2)} dz$.

4.26 $\oint\limits_{|z|=5} \frac{z dz}{(z-2)^2 (z+4)}$.

4.27 $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^2 dz}{(z-1)^2 (z+3)}$.

4.28 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z(z-1)^2} dz$.

4.29 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{iz} dz}{(z-1)^2 \cdot (z+1)}$.

4.30 $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi z}{2} dz}{(z-3) \cdot (z+i)^2}$.

ИДЗ-2 Ряды Тейлора и Лорана. Вычеты

1 Разложить функции в ряд Тейлора по степеням $z - z_0$ и определить круг сходимости полученного ряда:

1.1 $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$, $z_0 = i$.

1.2 $f(z) = \dfrac{2}{z-1}$, $z_0 = i$.

1.3 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$, $z_0 = 0$.

1.4 $f(z) = \dfrac{z}{z+2}$, $z_0 = 1$.

1.5 $f(z) = e^{z+3}$, $z_0 = -1$.

1.6 $f(z) = e^{2z}$, $z_0 = i$.

1.7 $f(z) = \dfrac{1}{z+4}$, $z_0 = -1$.

1.8 $f(z) = \sin z \cos z$, $z_0 = 0$.

1.9 $f(z) = e^{z}$, $z_0 = -1$.

1.10 $f(z) = \cos 2z$, $z_0 = 0$.

1.11 $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$, $z_0 = 0$.

1.12 $f(z) = \cos^2 \dfrac{iz}{2}$, $z_0 = 0$.

1.13 $f(z) = e^{z}$, $z_0 = 1$.

1.14 $f(z) = \dfrac{1}{3z+1}$, $z_0 = -2$.

1.15 $f(z) = e^{2z}$, $z_0 = -1$.

1.16 $f(z) = e^{z+2}$, $z_0 = 1$.

1.17 $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$, $z_0 = -1$.

1.18 $f(z) = \dfrac{1}{z+2}$, $z_0 = 1$.

1.19 $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$, $z_0 = 0$.

1.20 $f(z) = \dfrac{z}{z^2-4z+13}$, $z_0 = 0$.

1.21 $f(z) = \dfrac{z}{z^2-4z+3}$, $z_0 = 0$.

1.22 $f(z) = \dfrac{z}{z^2+4}$, $z_0 = 2$.

1.23 $f(z) = \dfrac{z}{z^2+4}$, $z_0 = i$.

1.24 $f(z) = \sin^2 z$, $z_0 = 0$.

1.25 $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$, $z_0 = 2$.

1.26 $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+4z-5}$, $z_0 = 0$.

1.27 $f(z) = \dfrac{1}{3-2z}$, $z_0 = 3$.

1.28 $f(z) = \dfrac{z}{z^2-2z-3}$, $z_0 = 0$.

1.29 $f(z) = \sin z$, $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

1.30 $f(z) = \ln z$, $z_0 = 1$.

2 Разложить функции в ряд Лорана в окрестности изолированных особых точек и определить область сходимости полученного ряда:

2.1 $f(z)=\dfrac{2z}{(z+1)(z-2)}$.

2.2 $f(z)=\dfrac{z-2}{(z+1)z}$.

2.3 $f(z)=\dfrac{z}{z^2+4}$.

2.4 $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-3z+2}$.

2.5 $f(z)=\dfrac{z}{z^2+z-2}$.

2.6 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$.

2.7 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4}$.

2.8 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$.

2.9 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z-2}$.

2.10 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$.

2.11 $f(z)=\dfrac{z}{z^2-4}$.

2.12 $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z+4)}$.

2.13 $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)(z+2)}$.

2.14 $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2-5z+4}$.

2.15 $f(z)=\dfrac{z}{z^2+5z+4}$.

2.16 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+4)}$.

2.17 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-z}$.

2.18 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$.

2.19 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z-3}$.

2.20 $f(z)=\dfrac{z}{z^2+4}$.

2.21 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$.

2.22 $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2+1}$.

2.23 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-3)}$.

2.24 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+3)}$.

2.25 $f(z)=\dfrac{z}{z^2+9}$

2.26 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$.

2.27 $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$.

2.28 $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$.

2.29 $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$.

2.30 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$.

3 Найти особые точки и определить их характер для функций:

3.1 $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}$.

3.2 $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$.

3.3 $f(z)=\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z}$.

3.4 $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^2}$.

3.5 $f(z)=ze^{\frac{1}{z+i}}$.

3.6 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z-2}$.

3.7 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$.

3.8 $f(z)=\dfrac{2}{z^2-1}$.

3.9 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$.

3.10 $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}+z^3$.

3.11 $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$.

3.12 $f(z)=e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$.

3.13 $f(z)=(z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$.

3.14 $f(z)=\dfrac{e^{z+e}}{z+e}$.

3.15 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$.

3.16 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$.

3.17 $f(z)=\cos\dfrac{1}{z-1}$.

3.18 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3}$.

3.19 $f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}$.

3.20 $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

3.21 $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$.

3.22 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$.

3.23 $f(z)=\cos\dfrac{1}{z+\pi}$.

3.24 $f(z)=z^2\cdot\sin\dfrac{1}{z}$.

3.25 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

3.26 $f(z)=\dfrac{z}{z^2+3z-4}$.

3.27 $f(z)=e^{\frac{1}{z+2}}$.

3.28 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}e^{\frac{1}{z-2}}$.

3.29 $f(z)=\dfrac{z^2+z-1}{z^3-z}$.

3.30 $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z-2)^2}$.

4 Найти вычеты в изолированных особых точках функций:

4.1 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$.

4.2 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^2}\sin\dfrac{1}{z+1}$.

4.3 $f(z)=\dfrac{z^4}{(z-1)^2}$.

4.4 $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z+1)^2}$.

4.5 $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$.

4.6 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$.

4.7 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$.

4.8 $f(z)=\cos\dfrac{z}{z-1}$.

4.9 $f(z)=\dfrac{2z^2+3z-1}{(z-1)\cdot z^2}$.

4.10 $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.

4.11 $f(z)=z^3\cdot e^{-\frac{1}{z}}$.

4.12 $f(z)=\dfrac{\cos^3 z}{z^3}$.

4.13 $f(z)=z\cdot\cos^2\dfrac{\pi}{z}$.

4.14 $f(z)=z\cdot e^{\frac{1}{z-1}}$.

4.15 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)^2}\cos\dfrac{1}{z-2}$.

4.16 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^2}$.

4.17 $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^3}$.

4.18 $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)^2}$.

4.19 $f(z)=\dfrac{1}{z+z^3}$.

4.20 $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2}$.

4.21 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-2)^3}$.

4.22 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-2z+5}$.

4.23 $f(z)=\dfrac{z+1}{(z^2+4)^2}$.

4.24 $f(z)=z^3\cdot\sin^2\dfrac{1}{z}$.

4.25 $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$.

4.26 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(z+3)}$.

4.27 $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z-2)^2}$.

4.28 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2}$.

4.29 $f(z)=\dfrac{e^{z^2}}{z^3}$.

4.30 $f(z)=z^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{z}$.

ИДЗ-3 Вычисление интегралов с помощью вычетов

1 Вычислить с помощью основной теоремы теории вычетов интегралы (контур обходится против часовой стрелки):

1.1 $\displaystyle\int\limits_{z+1-i|=2} \frac{e^{iz}dz}{z^2+4}$.

1.2 $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2} \frac{z\cdot\cos z}{(z-1)^2}$.

1.3 $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z\cdot dz}{(z+1)\cdot z^2}$.

1.4 $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$.

1.5 $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{e^{2z}dz}{z^2+2z}$.

1.6 $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{z\cdot dz}{z^2+4}$.

1.7 $\displaystyle\int\limits_{|z+1-i|=3} \frac{e^z dz}{z^2+3z+2}$.

1.8 $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2} \frac{z^2\cdot dz}{(z-1)^3}$.

1.9 $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=5} \frac{e^{z^2}\cdot dz}{z^2+4z+4}$.

1.10 $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos z\, dz}{z^2+2z}$.

1.11 $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=3} \frac{e^z\cdot dz}{z^2(z-2)}$.

1.12 $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{z}{z+3}e^{\frac{1}{2z}}dz$.

1.13 $\displaystyle\int\limits_{|z+2|=1} \frac{e^z\cdot dz}{z(z+2)^2}$.

1.14 $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=2} \frac{z^2\cdot dz}{(z^2+1)^2}$.

1.15 $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z(z^2-1)}$.

1.16 $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2} \frac{dz}{(z-1)^2}$.

1.17 $\displaystyle\int\limits_{|z|=5} \frac{z\cdot e^z}{z^2+4z}$.

1.18 $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=2} \frac{\sin z}{(z+1)^2}$.

1.19 $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2+2iz}dz$.

1.20 $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=3} \frac{z\cdot\sin z}{z^2+5z-6}dz$.

1.21 $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=3} \frac{z\cdot dz}{z^2-2z-8}$.

1.22 $\displaystyle\int\limits_{|z+3|=2} \frac{z^2-z}{z^2+6z+10}dz$

1.23 $\oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{z \cdot e^z \cdot dz}{z^2+8z-20}$.

1.24 $\oint\limits_{|z-2|=2} \frac{z \cdot dz}{(z-1)(z-2)}$.

1.25 $\oint\limits_{|z-2|=2} \frac{z \cdot dz}{(z+1)(z-2)^2}$.

1.26 $\oint\limits_{|z+2|=2} \frac{z \cdot dz}{(z+3)^2(z+5)}$.

1.27 $\oint\limits_{|z|=2} z \cdot e^{\frac{1}{z}} dz$.

1.28 $\oint\limits_{|z|=1} \sin^2 \frac{1}{z} dx$.

1.29 $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cdot dz}{z^3}$.

1.30 $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{\cos z}{(z-2)^2} dz$.

2 Вычислить интегралы:

2.1 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$.

2.2 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}$.

2.3 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x}$.

2.4 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{(1+\sin 2x)dx}{4+\cos x+3\sin x}$.

2.5 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos x}{2+\sin x} dx$.

2.6 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5+3\cos x}$.

2.7 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3-2\cos x+\sin x}$.

2.8 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3-2\cos x}$.

2.9 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3+2\sin x}$.

2.10 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{4+3\cos x}$.

2.11 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$.

2.12 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3-\sin x}$.

2.13 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{(1-\sin 2x)dx}{\sin x+\cos x+2}$.

2.14 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{(3\sin x+1)dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

2.15 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{2+\sin x+\cos x}$.

2.16 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin 2x}{8+\sin x} dx$.

2.17 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+2} dx$.

2.18 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{3\sin x+\cos x}{2+\cos x} dx$.

2.19 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{5+2\sin x} dx$.

2.20 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{4+\cos x} dx$.

2.21 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x}{4+\sin x} dx$.

2.22 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x+\sin x}{2+\cos x} dx$.

2.23 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x dx}{4-3\sin x+2\cos x}$

2.24 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{(1-\cos 2x)dx}{3+\sin x+\cos x}$.

2.25 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{2+\sin x+\cos x}$.

2.26 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x}{13-12\cos x} dx$.

2.27 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\cos x}$.

2.28 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x}{5-4\cos x} dx$.

2.29 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\sin x}$.

2.30 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{(1-2\sin x)dx}{\cos^2 x+2\sin^2 x+3}$.

3 Вычислить интегралы:

3.1 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

3.2 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

3.3 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

3.4 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

3.5 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

3.6 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2-x+1} dx$.

3.7 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

3.8 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x}{(x^2+25)^2} dx$.

3.9 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$.

3.10 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+x+1} dx$.

3.11 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$.

3.12 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$

3.13 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{(x^2+8x+25)^2}$.

3.14 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+9)^2} dx$.

3.15 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} dx$.

3.16 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)^2} dx$.

3.17 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+5)^2} dx$.

3.18 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

3.19 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-4}{(x^2+9)^2} dx$.

3.20 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx$.

3.21 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+2}{(x^2+6x+18)^2} dx$

3.22 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+10)^2}$.

3.23 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+2x+17)^2}$.

3.24 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{3x-1}{(x^2+4)^2} dx$.

3.25 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x-1}{(x^2+81)^2} dx$.

3.26 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x-3}{(x^2+9)^2} dx$.

3.27 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+2)dx}{(x^2+2x+10)^2}$.

3.28 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+16)^2} dx$.

3.29 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+25)^2} dx$.

3.30 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x+2}{(x^2-6x+18)^2} dx$.

4 Вычислить интегралы:

4.1 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}dx$.

4.2 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 4x dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

4.3 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+4}dx$.

4.4 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x\, dx}{x^2+8x+25}$.

4.5 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x\, dx}{x^2+6x+18}$.

4.6 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

4.7 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2}dx$.

4.8 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin 3x\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

4.9 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x\, dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

4.10 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x dx}{x^2+6x+10}$.

4.11 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x\, dx}{x^2+2x+10}$.

4.12 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+9)^2}dx$.

4.13 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x\, dx}{x^2+4x+13}$.

4.14 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{(x^2+1)^2}dx$.

4.15 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 7x}{x^2+6x+10}dx$.

4.16 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 3x}{x^2+2x+5}dx$.

4.17 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\sin 4x}{(x^2+1)^2}dx$.

4.18 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx$.

4.19 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin 3x}{(x^2+4)^2}dx$.

4.20 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1}dx$.

4.21 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x\, dx}{x^2+4x+20}$.

4.22 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}dx$.

4.23 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+x+1}dx$.

4.24 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\, dx}{x^2-4x+5}$.

4.25 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\,dx}{(x^2-2x+10)^2}$.

4.26 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}dx$.

4.27 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4}dx$.

4.28 $\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4}dx$.

4.29 $\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+25)^2}dx$.

4.30 $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+x+1}dx$.

ИДЗ-4 Элементы операционного исчисления

1 Используя свойства преобразования Лапласа, найти изображения функций:

1.1 а) $2t\sin 2t$, б) $\sin^2 t$.

1.2 а) $3t^2e^{2t}$, б) $\cos^2 t$.

1.3 а) $3t\cos 2t$, б) $\sin^4 t$.

1.4 а) $t^2\cos 2t$. б) $t^2\sin^2 t$.

1.5 а) $3t\cdot \mathrm{sh}3t$, б) $\cos^4 t$.

1.6 а) $3e^{-3t}\sin t$, б) $\mathrm{sh}^2 t$.

1.7 а) $4e^{3t}\cos t$, б) $\dfrac{\sin^{2t}}{t}$.

1.8 а) $e^t\,\mathrm{ch}\,t$, б) $\int\limits_0^t \cos 2\tau d\tau$.

1.9 а) $t\sin 3t$, б) $\int\limits_0^t \dfrac{\sin\tau}{\tau}d\tau$.

1.10 а) $2e^t\,\mathrm{ch}\,t$, б) $t^2\cos t$.

1.11 а) $-3t\cos 3t$, б) $\cos^3 t$.

1.12 а) $4t^3e^{-t}$, б) $e^{-t}\sin^2 t$.

1.13 а) $2t\,\mathrm{ch}\,2t$, б) $\sin^3 t$.

1.14 а) $4t\cdot \mathrm{sh}2t$, б) t^3e^{-t}.

1.15 а) $2e^{-4t}\sin 5t$, б) $\dfrac{\sin^2 t}{t}$.

1.16 а) $2t\cos^2 t$, б) $\mathrm{ch}^2 t$.

1.17 а) $2e^{-5t}\cos 4t$, б) $t\cdot \mathrm{ch}\,2t$.

1.18 а) $4t\cdot \mathrm{sh}2t$, б) t^3e^{2t}.

1.19 а) t^3e^{-2t}, б) t^3e^{-t}.

1.20 а) $e^{-2t}\sin 4t$, б) t^2e^{-2t}.

1.21 а) $t\cos^2 2t$, б) t^3e^{2t}.

1.22 а) $e^{3t}\,\mathrm{sh}\,4t$, б) $t\cdot\mathrm{sh}\,2t$.

1.23 а) $t\sin 6t$, б) $e^{t}\sin t$.

1.24 а) $2t\cdot\mathrm{ch}\,5t$, б) $\int\limits_0^t \cos^2\tau\,d\tau$.

1.25 а) $e^{-3t}\cos 4t$, б) $\int\limits_0^t \sin^2\tau\,d\tau$.

1.26 а) $2t\cdot\mathrm{sh}\,6t$, б) $e^{2}\,\mathrm{sh}\,2t$.

1.27 а) $t\cos t\sin t$, б) $\cos^2 2t$.

1.28 а) $e^{-5t}\,\mathrm{sh}\,4t$ б) $e^{t}\,\mathrm{sh}\,2t$.

1.29 а) $te^{t}\,\mathrm{sh}\,t$, б) $\int\limits_0^t \cos 4\tau d\tau$.

1.30 а) t^2e^{-t}, б) $t^2\cos 2t$.

1.31 а) $e^{2t}\cos t$, б) $e^{-2t}\sin^2 t$.

2 Найти оригиналы по изображению:

2.1 а) $\dfrac{2p}{(p^2+1)(p^2+4)}$, б) $\dfrac{e^{-2p}}{p^2}$.

2.2 а) $\dfrac{3}{\left(p^2+9\right)\left(p^2+16\right)}$, б) $\dfrac{e^{-p}}{p^4}$.

2.3 а) $\dfrac{6p^2}{\left(p^2+25\right)\left(p^2+36\right)}$, б) $\dfrac{pe^{-p}}{p^2+1}$.

2.4 а) $\dfrac{7}{\left(p^2+49\right)\left(p^2+64\right)}$, б) $\dfrac{1}{p^2+4}$.

2.5 а) $\dfrac{3p}{\left(p^2+9\right)\left(p^2+1\right)}$, б) $\dfrac{1}{\left(p^2-1\right)\left(p^2+4\right)}$.

2.6 а) $\dfrac{5p^2}{\left(p^2+4\right)\left(p^2+25\right)}$, б) $\dfrac{e^{-p}}{p^3}$.

2.7 а) $\dfrac{4}{\left(p^2+36\right)\left(p^2+16\right)}$, б) $\dfrac{7}{p^2+4p+3}$.

2.8 а) $\dfrac{p^2+12p+4}{p\left(p^2+12p+36\right)}$, б) $\dfrac{6}{p^2+p-2}$.

2.9 а) $\dfrac{2p^2-2p+4}{p\left(p^2+4p+4\right)}$, б) $\dfrac{4}{p^2-2p-3}$.

2.10 а) $\dfrac{3p^2+2p+8}{p\left(p^2+6p+9\right)}$, б) $\dfrac{5}{p^2-3p+2}$.

2.11 а) $\dfrac{4p^2-3p+3}{p\left(p^2-4p+4\right)}$, б) $\dfrac{3}{p^2+4p-5}$.

2.12 а) $\dfrac{2p^2-5p+4}{p\left(p^2-6p+9\right)}$, б) $\dfrac{2}{p^2+3p+2}$.

2.13 а) $\dfrac{3p^2-4p+5}{p(p^2+2p+1)}$, б) $\dfrac{1}{p^2+2p-3}$.

2.14 а) $\dfrac{p^2-3p+4}{p(p^2-2p+1)}$, б) $\dfrac{p}{p^2+p+1}$.

2.15 а) $\dfrac{2p^2-3p+3}{p(p^2+8p+16)}$, б) $\dfrac{p^2}{(p+2)^3}$.

2.16 а) $\dfrac{4p^2+3p+1}{p(p^2+10p+25)}$, б) $\dfrac{1}{p(p+2)^2}$.

2.17 а) $\dfrac{4p}{(p^2+36)(p^2+1)}$, б) $\dfrac{2}{p^2+3p-4}$.

2.18 а) $\dfrac{6}{(p^2+4)(p^2+9)}$, б) $\dfrac{3}{p^2-4p+3}$.

2.19 а) $\dfrac{5p^2}{(p^2+25)(p^2+1)}$, б) $\dfrac{1}{p^2-3p-4}$.

2.20 а) $\dfrac{7p}{(p^2+36)(p^2+49)}$, б) $\dfrac{4}{p^2+5p-6}$.

2.21 а) $\dfrac{3p^2+5p+3}{p(p^2-16p+64)}$, б) $\dfrac{1}{(p^2+9)^2}$.

2.22 а) $\dfrac{3p^2+4p+4}{p(p^2-14p+49)}$, б) $\dfrac{4p^2}{(p^2+1)(p^2+16)}$.

2.23 а) $\dfrac{p^2-5p+7}{p(p^2-12p+36)}$, б) $\dfrac{7}{p^2-5p+4}$.

2.24 а) $\dfrac{2p^2+3p+1}{p^3+p}$, б) $\dfrac{9}{p^2-5p-6}$.

2.25 а) $\dfrac{2p+1}{(p^2-p-6)^2}$, б) $\dfrac{p^3}{(p^2+1)^2}$.

2.26 а) $\dfrac{1}{(p+1)^2(p+2)^2}$, б) $\dfrac{1}{p^2+4}$.

2.27 а) $\dfrac{p+1}{p^3-4p}$, б) $\dfrac{1}{p^2(p^2+p-2)}$

2.28 а) $\dfrac{p^2}{p^4-1}$, б) $\dfrac{1}{p(p+1)(p+2)}$.

2.29 а) $\dfrac{1}{p^3(p+2)}$, б) $\dfrac{e^{-p}}{p^2+1}$.

2.30 а) $\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$, б) $\dfrac{p^2+2}{p^4+4}$.

3 Методами операционного исчисления решить задачу Коши:

3.1 $x''-9x=2-t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

3.2 $x''+4x=2\cos 2t$, $x(0)=0$, $x'(0)=4$.

3.3 $x''+4x=\cos 3t$, $x(0)=2$, $x'(0)=2$.

3.4 $x''+x=t\cos 2t$, $x(0)=x'(0)=0$.

3.5 $x''+2x'+x=e^{-t}$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

3.6 $x'' - 2x' + 2x = \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

3.7 $x'' - 9x = \operatorname{sh} t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 3$.

3.8 $x''' - x'' = e^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = x''(0) = 0$.

3.9 $x'' + 6x' + 9x = 9e^{3t}$, $x(0) = x'(0) = 0$.

3.10 $x'' - 3x' + 2x = te^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$.

3.11 $x''' - x' = 5\cos 2t$, $x(0) = x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.

3.12 $x''' - x'' = 2t$, x(0) = – 1, $x'(0) = x''(0) = 0$.

3.13 $x''' - 2x' = 6\sin 2t$, $x(0) = x'(0) = -1$, $x''(0) = 0$.

3.14 $x''' + 4x' = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

3.15 $x'' - 4x' + 5x = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

3.16 $x'' - 4x' + 3x = e^{-t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

3.17 $x'' + 2x' + 2x = 2 + 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

3.18 $x'' - 5x' + 6x = t\sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

3.19 $x'''' + x = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = x'''(0) = 0$.

3.20 $x''' - x = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.

3.21 $x'' - 2x' + 5x = e^t \cos 2t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

3.22 $x'' + 3x' + 2x = e^{-3t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.

3.23 $x''' + 6x' = 3\cos 3t$, $x(0) = x'(0) = -1$, $x''(0) = 0$.

3.24 $x''' + 5x' = 5t$, $x(0) = x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.

3.25 $x''' - 3x'' + 2x' = 12e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$, $x''(0) = 0$.

3.26 $x''' - 6x' = 2\sin 3t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = x''(0) = 0$.

3.27 $x''' - 4x' = -3\operatorname{sh} t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = x''(0) = 0$.

3.28 $x''' + 3x' = 2\cos t$, $x(0) = x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$.

3.29 $x''' - x'' - 2x' = 6e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.

3.30 $x''' - 3x' = 4\operatorname{ch} t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = x''(0) = 1$.

4 Методом операционного исчисления найти решение системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями:

4.1 $\begin{cases} y' + y + 3z = x \cdot e^{-x}, \\ z' - 2y + z = 1 - x, \end{cases}$
$y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

4.2 $\begin{cases} y' - y - 3z = 4x^3, \\ z' - y + z = \operatorname{sh} 4x, \end{cases}$
$y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

4.3 $\begin{cases} y' - 5y + 3z = 1, \\ z' + y - z = x^2, \end{cases}$
$y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

4.4 $\begin{cases} y' + z = 5\sin 4x, \\ z' - y = -3x, \end{cases}$
$y(0) = 1,\ z(0) = -1.$

4.5 $\begin{cases} y' - 2y + z = 6x, \\ z' + 4y + 2z = 9\cos 3x, \end{cases}$
$y(0) = 2,\ z(0) = 1.$

4.6 $\begin{cases} y' + 4y - 2z = e^{2x}, \\ z' - 4y + z = 3 \cdot e^{x}, \end{cases}$
$y(0) = z(0) = 0.$

4.7 $\begin{cases} y' + y + z = \sin 3x, \\ z' + y - z = 6x^2, \end{cases}$
$y(0) = -2,\ z(0) = 1.$

4.8 $\begin{cases} y' - y - z = 6 \cdot e^{3x}, \\ z' - y + z = 5x^4, \end{cases}$
$y(0) = 1,\ z(0) = -2.$

4.9 $\begin{cases} y' - y + 4z = x \cdot e^{x}, \\ z' + 3y - z = x, \end{cases}$
$y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

4.10 $\begin{cases} y' + 2y + 2z = 10x^3, \\ z' - 2y - 2z = 8\cos 4x, \end{cases}$
$y(0) = -1,\ z(0) = 1.$

4.11 $\begin{cases} y' - 2y - 2z = x - 1, \\ z' - y + 3z = \sin x, \end{cases}$
$y(0) = z(0) = 0.$

4.12 $\begin{cases} y' + 3y - 2z = x^2 + 1, \\ z' - 2y + z = x, \end{cases}$
$y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

4.13 $\begin{cases} y' + y + z = 3e^{-3x}, \\ z' - 2y - z = x^3, \end{cases}$
$y(0) = z(0) = 0.$

4.14 $\begin{cases} y' + 2z = 4, \\ z' - y = \operatorname{ch} 2x, \end{cases}$
$y(0) = 2,\ z(0) = 1.$

4.15 $\begin{cases} y' - y - 4z = x^2 \sin x, \\ z' + 4y - z = x, \end{cases}$

$y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

4.16 $\begin{cases} y' - 4z = 8\,\mathrm{sh}\,2x, \\ z' + y = 2x, \end{cases}$

$y(0) = -2,\ z(0) = -1.$

4.17 $\begin{cases} y' + y + 3z = 4x, \\ z' + y - z = 12 \cdot \mathrm{sh}\,4x, \end{cases}$

$y(0) = -1,\ z(0) = -2.$

4.18 $\begin{cases} y' + y + 3z = 1, \\ z' - 2y - z = x \cdot \cos x, \end{cases}$

$y(0) = z(0) = 0.$

4.19 $\begin{cases} y' - y + 2z = 3 + x, \\ z' - y + z = e^x, \end{cases}$

$y(0) = z(0) = 0.$

4.20 $\begin{cases} y' - y + 2z = 3 \cdot \cos 2x, \\ z' - y + z = 1, \end{cases}$

$y(0) = -1,\ z(0) = 2.$

4.21 $\begin{cases} y' - y - z = x, \\ z' + 2y + z = 10 \cdot \mathrm{ch}\,3x, \end{cases}$

$y(0) = 2,\ z(0) = -1.$

4.22 $\begin{cases} y' + 3y - z = x \cdot \sin x, \\ z' - y + z = x, \end{cases}$

$y(0) = 0,\ z(0) = 1.$

4.23 $\begin{cases} y' - 2y + z = 1, \\ z' + y - 2z = x^2, \end{cases}$

$y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

4.24 $\begin{cases} y' + 2y + z = \sin x, \\ z' - 4y - 2z = \cos x, \end{cases}$

$y(0) = z(0) = 0.$

4.25 $\begin{cases} y' + 2y + 3z = 2x, \\ z' - 3y + 2z = x^2, \end{cases}$

$y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

4.26 $\begin{cases} y' - z = x^3, \\ z' + y = 3 \cdot \sin 2x, \end{cases}$

$y(0) = -2,\ z(0) = 0.$

4.27 $\begin{cases} y' - 9z = 8\,\mathrm{ch}\,x, \\ z' - y = e^{-2x}, \end{cases}$

$y(0) = 2,\ z(0) = 0.$

4.28 $\begin{cases} y' + 2y + z = 5x^4, \\ z' - 4y - 2z = 2e^{2x}, \end{cases}$

$y(0) = 0,\ z(0) = -2.$

4.29 $\begin{cases} y' - y - z = \sin x, \\ z' + y - 2z = 0, \end{cases}$

$y(0) = z(0) = 0.$

4.30 $\begin{cases} y' + y - 2z = 1 - x, \\ z' - 2y = x^2, \end{cases}$

$y(0) = 1,\ z(0) = 0.$

Литература

1. Высшая математика. Специальные главы [Текст] : учебное пособие для студентов вузов / П. И. Чинаев [и др]. – Киев: Вища школа, 1981.

2. Демидович, В. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] : учебное пособие для вузов / В. П. Демидович. – М. : Наука, 1977.

3. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости [Текст] : учебное пособие для вузов / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. Наука, 1981.

4. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного [Текст] : учебное пособие для вузов / И. И. Привалов. – М. : Наука, 1977.

5. Пчелин, Б. К. Специальные разделы высшей математики [Текст] : учебное пособие для втузов / Б. К. Пчелин. – М. : Высшая математика, 1973.

6. Сидоров, Ю. В. Лекции по теории функций комплексного переменного [Текст] : учебник для вузов / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. – М. : Наука, 1989.

7. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты) [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. Ф. Чудесенко. – М. : Высш. школа, 1983.

Учебное издание

Денисенко Тамара Андреевна
Марченко Лариса Николаевна
Парукевич Ирина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое пособие
для студентов физических факультетов вузов

В семи частях

Часть седьмая

Теория функций

комплексной переменной

Редактор В. И. Шкредова
Корректор В. В. Калугина

Лицензия №02330/0133208 от 30.04.04.
Подписано в печать 26.12.07. Бумага писчая №1. Формат 60x84 1/16. Гарнитура Times New Roman Cyr. Усл. печ. л. . Уч-изд. л. . Тираж 100 экз. Заказ № .

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Лицензия №02330/0056611 от 16.02.04.
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104